Практичне заняття 14

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Мета: Повторити умови інтегрування заміною змінної і частинами.
Формувати вміння та навики обчислення визначеного інтеграла методом інтегрування заміною змінної і частинами.
Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

1Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної.
2Обчислення визначеного інтеграла частинами.

Студенти повинні знати:

- формулу Ньютона-Лейбніца;
- метод знаходження визначеного інтеграла заміною змінної;
- метод знаходження визначеного інтеграла інтегруванням частинами.

Студенти повинні уміти:

- знаходити визначений інтеграл заміною змінної;
- знаходити визначений інтеграл інтегруванням частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка, таблиця формул інтегрування, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 279-283.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 365-385.

Теоретичні віломості:

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема. **Якщо: 1)** $f(x)$ **— неперервна для** $x\in[a;\,b]$ **; 2)** $\phi(\alpha)=a,\ \phi(\beta)=b;$ **3)** $x=\phi(t)$ **та** $\phi'(t)$ **— неперервні для** $t\in[\alpha;\,\beta];$ **4) при** $t\in[\alpha;\,\beta]\Rightarrow x\in[a;\,b],$ **то**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left|\begin{array}{c} x=\phi(t),\\ dx=\phi'(t)\,dt;\\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b\\ t & \alpha & \beta\end{array}\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\ dx=2tdt\\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9\\ t & 2 & 3\end{array}\end{array}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=$$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=2(3-\ln 4-(2-\ln 3))=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема **. Якщо функції** $u(x)$ **та** $v(x)$ **мають неперервні похідні для** $x\in[a;\,b]$ **, то**

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (2)$$

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=x,\ du=dx;\\ \cos 2xdx=dv,\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=\left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0\cdot\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Приклад . $$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{cc} 1+\sqrt{2x+1}=t, & dx=(t-1)dt;\\ x=\frac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{ccc} x & 0 & 4\\ t & 2 & 4\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=\int_2^4\frac{t-1}{t}dt=\int_2^4\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=(t-\ln|t|)\Big|_2^4=4-\ln 4-(2-\ln 2)=2-\ln 2.$$

Приклад $$\int_1^e x\ln x\,dx=\left|\begin{array}{cc} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x};\\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2\cdot dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}\left(\ln e-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

Обчислити визначені інтеграли

1. $\int_0^1 (1+e^{3x})^2 e^{3x}\,dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left((1+e^3)^3-8\right)$.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *Відповідь.* $\mathrm{arctg}\, e-\frac{p}{4}$.

3. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$.

6. $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$.

Практичне заняття 15

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур

Мета: набуття навичок знаходження площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла. Формувати вміння та навики побудови плоскиї фігур та обчислення їх площ

Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв’язування задач на знаходження площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Студенти повинні знати: геометричний зміст та властивості визначеного інтеграла, що застосовуються до обчислення площ плоских фігур

Студенти повинні уміти: знаходження площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, таблиця невизначених інтегралів, робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 290-294.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 401-405.

Теоретичні віломості:

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур

Якою б не була криволінійна фігура, що обмежена неперервними кривими лініями, шляхом її розсікання лініями паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y=f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x)\geq 0.$ Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x)\leq 0$ (рис. 2),

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \qquad (7.20)$$

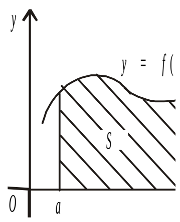

Рис. 1

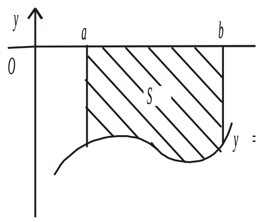

Рис. 2

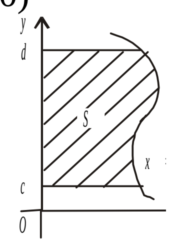

Рис. 3

II. Фігура обмежена лініями $x=\phi(y),\ x=0,\ y=c,\ y=d$ (рис. 3). Функція $x=\phi(y)$ — неперервна та $\phi(y)\geq 0.$ Площа S такої фігури буде

$$S=\int_c^d \phi(y)\,dy, \qquad (1)$$

а якщо $\phi(y)\leq 0$ (рис. 4), то

$$S=\left|\int_c^d \phi(y)\,dy\right|. \qquad (2)$$

III. Фігура обмежена лініями $y=f(x)$, $y=g(x),\ x=a,\ x=b.$ Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x)\geq g(x)$ для $x\in[a;\ b]$ (рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx. \qquad (3)$$

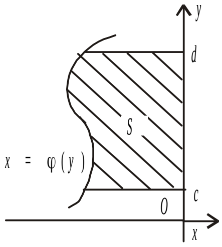

Рис. 4

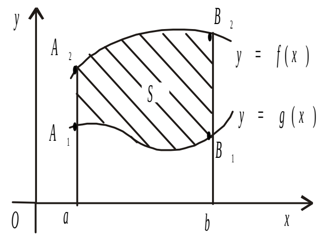

Рис. 5

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y=-x^2+4x+5 \quad \text{та} \quad y=2x-3.$$

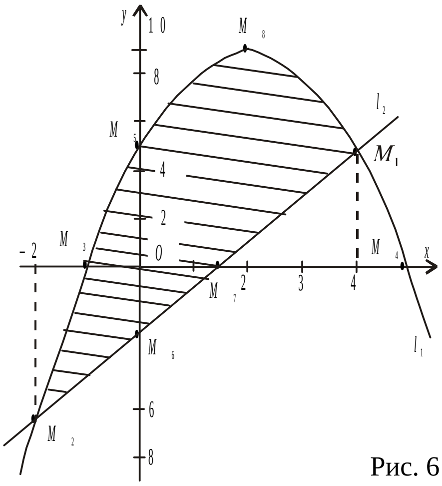

Рис. 6

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 6).

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \text{¿} \{ y=-x^2+4x+5 \text{¿¿¿¿} \text{¿}$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \text{¿} \{ y=-x^2+4x+5 \text{¿¿¿}$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \text{¿} \{ y=-x^2+4x+5 \text{¿¿¿}$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \text{¿} \{ y=0 \text{¿¿¿}$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \text{¿} \{ x=0 \text{¿¿¿}$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ за формулою (7.23) буде така:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Big|\text{¿}_{\text{¿}-2}^{4}=$$

$$\text{¿}-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

Приклад . Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x=y^2+2y+6\ (l_1)$, $x-3y=26\ (l_2)$.

● Побудуємо фігуру, обмежену параболою $x=y^2+2y+6$ та прямою $x-3y=26$, на координатній площині; при цьому обов’язково треба знайти точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат (рис. 7)

$$l_1\cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ x-3y=26 \end{cases} \begin{cases} x=3y+26 \\ y^2-y-20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y+26 \\ \left[\begin{array}{l} y=-4 \\ y=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=14 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=41 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(14;-4) \\ M_2(41;5). \end{array}\right.$$

$$l_1\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(6;0) .$$

$$l_1\cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=y^2+2y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2+2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing .$$

$$l_1\cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=26 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(0;-\frac{26}{3}\right) .$$

$$l_2\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=26 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(26;0) .$$

$x=y^2+2y+6 \Leftrightarrow (x-5)=(y+1)^2 \Rightarrow M_6(5;-1)$ — вершина параболи.

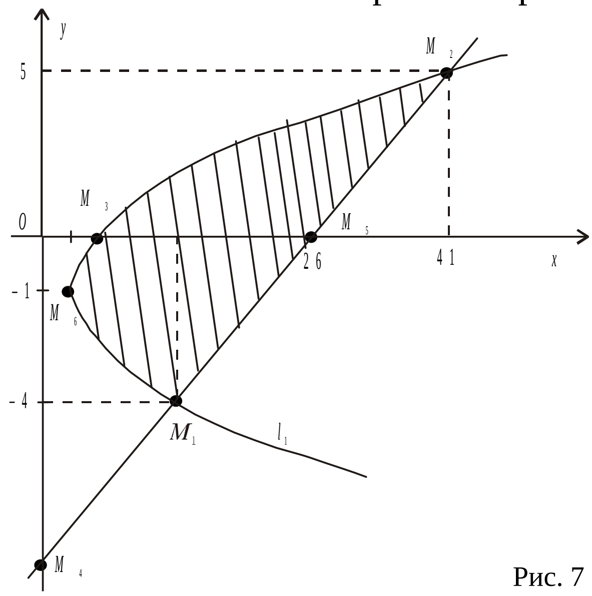

Рис. 7

Для обчислення площі фігури $S_{M_1M_2M_6}$ найбільш зручно скористатись формулою $S=\int\limits_c^d \left(\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right)dy$.

Отже, за цією формулою дістанемо:

$$S_{M_1M_2M_6}=\int\limits_{-4}^{5}\left(3y+26-\left(y^2+2y+6\right)\right)dy=\int\limits_{-4}^{5}\left(-y^2+y+20\right)dy=$$

$$=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+20y\right)\Big|_{-4}^{5}=-\frac{125}{3}+\frac{25}{2}+100-\left(\frac{64}{3}+\frac{16}{2}-80\right)=121{,}5.$$

Обчислити площі фігур:

1 $y=x^2+4x$, $y=x+4.$ *Відповідь.* $S=\frac{125}{6}$.

2. $y=-x^2+9$, $y=2x+1.$ *Відповідь.* $S=36$.

Лекція 16

Тема: Диферегнціальні рівняння. Основні поняття та означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

Мета: Вивчення поняття диференціального рівняння, розв'язання задачі Коші, диференціального рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, наочний, практичний

План:

1 Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

2 Основні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння.

3 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Креслярське приладдя, плакати, калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с 311-327.

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.:К.-АСК,2001,с 421-430.

Теоретичні відомості

Тема: Основні поняття та означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними (термін «диференціальне рівняння» введений у 1576 р. Лейбніцем).

Диференціальне рівняння називається *звичайним,* якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням у частинних похідних,* якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

1. Диференціальні рівняння першого порядку

Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний вміст диференціального рівняння.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x,y,y') = 0, \qquad (1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1), нерозв'язне відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно $y^{1}{}'$, то його записують у вигляді

$$y'= f(x, y) \qquad (2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі.

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \text{або} \quad -f(x,y)dx+dy=0$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y)$ ¿ 0, дістанемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (3)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — відомі функції. Рівняння (3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду .(1), (2) і (3):

$xy'+y^2 — 1 = 0$; $-y'=2x — y$; $(x — 3y)dx + xydy = 0$.

Знаходження невідомої функції, що входить в деференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме непорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».).

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дає така теорема Коші [26].

Теорема 1 (про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція f (x, y) і її частинна похідна f'_y *(x, y) визначені і неперервні у відкритій області G площини Оху і точка* $(x_0; y_0)$ ¿ *G. Тоді існує єдиний розв'язок y =* ϕ *(x) рівняння (2), який задовольняє умову*

$y = y_0$ при $x = x_0$, *тобто* $\phi(x_0) = y_0$. (4)

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

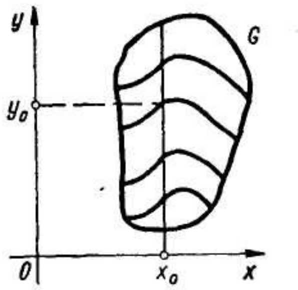

Рис. 8.1

y_0,

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0; y_0)$ ¿ *G* проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 *і* змінювати не виходячи при цьому з області *G,* то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (2) має безліч різних розв'язків (рис. 8.1).

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y = \phi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$y|_{x=x_0} = y_0$ або $y(x_0) — y_0$. (5)

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається *задачею Коші. З* погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, *f(x, y)* або f'_y *(x, y) в* цих точках розривні), називаються *особливими.* Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком.*

Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою.* Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної.

Нехай задано рівняння

$\Phi(x, y, C) = 0,$ (6)

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Нехай права частина диференціального рівняння (*2*) задовольняє в області *G* умови теореми Коші.

Функція $y = \phi(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\phi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0; y_0)$ ¿ G можна знайти таке значення $C=C_o$, що функція $y = \phi(x,C_o)$ задовольняє початкову умову:

$$\phi(x_0, C_o) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y = \phi(x, C_o)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \phi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_o$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_o) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом рівняння.*

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\,\phi(y). \qquad (7)$$

де $y(x)$ і $\phi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\phi(y)$ (вважаємо, що $\phi(y)$ ¿ 0) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\phi(y)} = f(x)\,dx \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\phi(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\phi_1(y)\,dx + f_2(x)\phi_2(y)\,dy = 0 \qquad (9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\phi_1(y)\, f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\phi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\phi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\phi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\, dx - (y + yx^2)\, dy = 0.$$

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1 + x^2)(1 + y^2)$ ¿ 0, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \quad \text{або} \quad \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$\ln(l+x^2) = \ln(l + y^2) + \ln|C|$, C ¿ O. Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \quad C \neq 0$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\, dx + (x^2 - x^2y)\, dy = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x + 1)dx + x^2(1 - y)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію x^2y^2 ¿ 0, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{y+1}{y^2}dy = C, \quad C \in R,$$

або

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

звідки

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=C.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$y'=f\left(ax+by+c\right), \qquad (10)$$

де *a, Ь, c* — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u=ax+by+c \qquad (11)$$

рівняння (10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, диференціюючи рівність (11) по *x*, дістанемо $\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, тому згідно з (10) маємо рівняння $\frac{du}{dx}=a+bf\left(u\right)$, у якому при *a+bf(u)* ¿ 0 відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a+bf\left(u\right)}=dx$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи *u* на *ax + by + c*, дістанемо загальний інтеграл рівняння (10).

Якщо *a + bf (x)* = 0, або, що те ж саме, $\frac{du}{dx}$ = 0, то, згідно з рівністю (11), рівняння (10) може мати розв'язки *ax + by + c* = С.

Лекція 17

Тема: Лінійні і однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Мета: Вивчення методів розв`язування лінійних однорідних диференціальнних рівнянь першого порядку

Метод: словесний , практичний

План

1 Означення

2 Методи Бернуллі і Лагранжа

3 Рівняння Я. Бернуллі

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 432-438.

1 Означення

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)\cdot y = g(x) \quad , \qquad (2.11)$$

де p(x) і д(x) — задані функції, зокрема — постійні.

Особливість ДР (2.11): шукана функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, і не перемножуючи між собою.

Розглянемо два методи інтегрування ДР (2.11) — метод И Бернуллі і метод Лагранжа.

2 Метод И. Бернуллі

Розв'язок рівняння (2.11) шукається у виді добутку двох інших

функцій, тобто за допомогою підстановки y =и v, де и =и(x) і v = v(x) — невідомі функції від x, причому одна з них довільна (але не дорівнює нулю дійсно будь-яку функцію y(x) можна записати як $y(\chi) = \frac{y(\chi)}{v(\chi)} ¿ v(\chi) = \upsilon(\chi)\cdot v(\chi)$,

де $v(\chi) \neq 0$. Тоді $y' = u'\cdot v + v\cdot u'$. Підставляючи y', y у рівняння (2.11), одержуємо: $u'\cdot v + u\cdot v' + p(x)\cdot u\cdot v = g(x)$ або

$$u'\cdot v + u'\cdot(v' + (x)\cdot v) = g(x) \quad . \qquad (2.12)$$

Підберемо функцію v = v(x) так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто розв'яжемо ДР $v' + p(x)\cdot v = 0$. Отже, $\frac{dv}{dx} + p(x)\cdot v = 0$, тобто $\frac{dv}{v} = -p(x)\cdot dx$. Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|v| = -\int p(x)\cdot dx + \ln|c| \quad .$$

Через довільність вибору функції v(x), можна прийняти c = 1. Звідси

$$v = e^{-\int p(x)\cdot dx} \quad .$$

Підставляючи знайдену функцію v у рівняння (2.12), одержуємо

$u'\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} = g(x)$. Отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} = g(x) \quad , \quad du = g(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx \quad ,$$

$$u = \int g(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx + c$$

Повертаючись до змінної y, одержуємо розв'язок

$$y = v\cdot u = \left(\int g(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx + c\right)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} \qquad (2.13)$$

вихідного ДР (2.11).

Приклад 2.8. Проінтегрувати рівняння $y' + 2xy = 2x$

Розв'язок: Покладемо y = uv. Тоді u'v + uv' + 2xuv = 2x, тобто u'v+ u(u' + 2xv) = 2x. Спочатку розв'язуємо рівняння v' + 2xv =0:

$$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x2},\quad du=\int 2x\cdot e^{x2}\cdot dx,\quad u=e^{x2}+c\;.$$

Тепер розв'язуємо рівняння $u'\cdot e^{-x2}+u\cdot 0=2x$ тобто

$$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x2},\quad du=\int 2x\cdot e^{x2}\cdot dx,\quad u=e^{x2}+c\;.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння $y=u\cdot v=(e^{x2}+c)\cdot e^{-x2}$,

тобто $y=1+c\cdot e^{-x2}$. •

Метод Лагранжа (метод варіації довільної постійної)

Рівняння (2.11) інтегрується у такий спосіб.

Розглянемо відповідне рівняння без правої частини, тобто рівняння y' + p(x)y = 0. Воно називається лінійним однорідним ДР першого порядку. У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\cdot dx\;.\quad \ln|y|=-\int p(x)\cdot dx=\ln|c_1|$$

Таким чином, $|\frac{y}{c_1}|=e^{-\int p(x)\cdot dx}$, тобто

$y=\pm c_1 e^{-\int p(x)\cdot dx}$, тобто $y=\pm c_1 e^{-\int p(x)\cdot dx}$ або $y=c\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}$, де $c=\pm c_1$

Метод варіації довільної сталої полягає у тому, що сталу c в отриманому розв’язку заміняємо функцією c(x), тобто c = c(x). Розв'язок рівняння (2.11) шукаємо у вигляді

$$y=c(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx} \tag{2.14}$$

Знаходимо похідну (для зручності запису користуємося позначенням $e^{f(x)}=\exp(F(x))$:

$$y'=c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)+c(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)\cdot(-p(x))\;.$$

Підставляємо значення y и y' у рівняння (2.11):

$$c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)-c(x)\cdot p(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx+c(x)\cdot p(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)=g(x)$$

Другий і третій доданки взаємно знищуються, і рівняння прийме вигляд

$$c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)=g(x)\;.$$

Отже, .

$$dc(x)=g(x)\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx\;.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$c(x)=\int g(x)\cdot\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx+c$$

Підставляючи вираз c(x) у рівність (2.14), одержимо загальний розв'язок ДР (2.11):

$$y=\left[\int g(x)\cdot\exp\left(\int p(x)\cdot dx\right)\cdot dx+c\right]\cdot\exp\left(-\int p(x)\cdot dx\right).$$

Природно, та ж формула була отримана методом Бернуллі (порівн. з (2.13)).

Приклад 2.9. Розв'язати приклад 2.8 методом Лагранжа.

Розв'язання: Розв'язуємо рівняння y' + $2xy$ = 0. Маємо $\frac{dy}{y}=-2\cdot dx$, або $y=c\cdot e^{-x2}$.

Заміняємо c на c(x), тобто розв'язок ДР y' + $2xy$ = 2 x шукаємо у виді $y=c(x)\cdot e^{-x2}$. Маємо

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x2}+c(x)\cdot e^{-x2}\cdot(-2x).$$

Тоді

$c'(x)\cdot e^{-x2}-2xc(x)\cdot e^{-x2}+2xc(x)\cdot e^{-x2}=2x$,тобто $c'(x)\cdot e^{-x2}=2x$, або

$c(x)=\int 2x\cdot e^{x2}dx$,або $c(x)=e^{x2}+c$.

Тому $y=(e^{x2}+c)\cdot e^{-x2}$,або $y=1+c\cdot e^{-x2}$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Зауваження. Рівняння виду $(x\text{-}P(y)+Q(y))\text{ - }\{y'=R(y)¿$, де $P(y),Q(y),R(y)\neq 0$ — задані функції, можна звести до лінійного, якщо x вважати функцією, а

y — аргументом: x = x(y). Тоді, користуючись рівністю $y'_x=\frac{1}{x'_y}$,одержуємо $\frac{x\cdot P(y)+Q(y)}{x'}=R(y)$,тобто лінійне відносно x рівняння. Його розв'язок шукаємо у виді x = u v, де u = u(y), v =v(y) — дві невідомі функції.

Приклад 2.10. Знайти загальний розв'язок рівняння (x + y) y' = 1.

Розв'язок: З огляду що $y'=\frac{1}{x'}$, від вихідного рівняння переходимо до лінійного рівняння $x'=x+y$.

Застосуємо підстановку x = uv. Тоді $x'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Одержуємо: $u'\cdot v+u\cdot v'=u\cdot v+y$, або $u'\cdot v+(v'-v)+y$.

Знаходимо функцію $v:v'-v=0$, $\frac{dv}{v}=dy$, $v=e^{y}$.

Знаходимо функцію $u:u'\cdot e^{y}+u\cdot 0=y$, тобто $u'=y\cdot e^{-y}$, або $u=\int y\cdot e^{-y}\cdot dy$.

Інтегруючи по частинах, знаходимо: $u=-y\cdot e^{¿y}-e^{-y}+c$. Значить загальний розв'язок даного рівняння:

$x=u\cdot v=(-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+c)\cdot e^{y}$, або $x=-y-1+c\cdot e^{y}$.

3 Рівняння Я. Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n \quad ,n ¿ \ R, n ¿ \ 0, n ¿ \ 1 \qquad (2.15)$$

називається рівнянням Бернуллі. Покажемо, що його можна привести до лінійного.

Якщо n=0, то ДР (2.15) — лінійне, а при n=1 — з відокремлюваними змінними. У загальному випадку, розділивши рівняння (2.15) на $y^n \neq 0$, одержимо:

$$y^{-n}\cdot y' + p(x)\cdot y^{-n+1} = g(x) \quad . \qquad (2.16)$$

Позначимо $y^{-n+1} = z$. Тоді $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)\cdot y^{-n}\cdot y'$. Звідси знаходимо $y^{-n}\cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Рівняння (2.16) приймає вид

$$\frac{1}{1-n}\cdot z' + p(x)\cdot z = g(x)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок його відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння (2.15) до лінійного. На практиці ДР (2.15) зручніше шукати методом И. Бернуллі у виді $y = u\cdot v$ (не зводячи його до лінійного).

Практичне заняття 16

Тема. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Мета: повторити та закріпити поняття диференціальних рівнянь. Формувати вміння та навики розв’язування рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

План

1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними **Студенти повинні знати:**

методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними

Студенти повинні уміти:

- розв’язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 341-345.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 470-472.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Найбільш простим ДР першого порядку є, рівняння виду

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.5)$$

У ньому один доданок залежить тільки від x, а інший — від y. Іноді такі ДР називають рівняннями з відокремленими змінними. Проінтегрировавши почленно це рівняння, одержуємо:

$$\int P(x)\cdot dx + \int Q(y)\cdot dy = c$$

— його загальний інтеграл.

Більш загальний випадок описують рівняння з *відокремлюваними змінними*, котрі мають вигляд

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0 \,. \qquad (2.6)$$

Особливість рівняння (2.6) у тім, що коефіцієнти при dx і dy являють собою добуток двох функцій (чисел), одна з яких залежить тільки від x,

інша — тільки від y.

Рівняння (2.6) легко зводиться до рівняння (2.5) шляхом почленного поділу його на $Q_1(y) \cdot P_2(x)$ ¿ 0 Одержуємо:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = 0 \,, \qquad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = c$$

— загальний інтеграл.

Зауваження. 1. При проведенні почленного поділу ДР на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ можуть бути загублені деякі розв'язки. Тому варто окремо розв’язати рівняння $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ й знайти ті розв'язки ДР, що не можуть бути отримані з загального розв'язку, — особливі розв'язки.

2. Рівняння $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ також зводиться до рівняння з відокремленими змінними. Для цього досить покласти $y'=\frac{dy}{dx}$ і розділити змінні.

3. Рівняння $y'=f(ax+by+c)$, де a, b, c — числа, шляхом заміни $ax+by+c=u$ зводиться до ДР з відокремленими змінними. Диференціюючи по x, одержуємо:

$$\frac{du}{dx}=a+b\cdot\frac{dy}{dx}\,.$$

Дане рівняння приймає вид $\frac{du}{dx}=a+b\cdot f(u)$, відкіля випливає

$$\frac{du}{a+b\cdot f(u)}=dx\,.$$

Інтегруючи це рівняння і заміняючи u на $ax+by+c$, одержимо загальний інтеграл початкового рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння $xdx+ydy=0$

Розв'язок: Дане рівняння є ДР з відокремленими змінними.

Тому $\int x\cdot dx-\int y\cdot dy=c_1$ або $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=c_1$. Позначимо $\frac{c}{2}=c_1$.

Тоді $x^2-y^2=c$ — загальний інтеграл ДР.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$

Розв'язання: Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$$

Воно має вигляд (2.6). Поділимо обидві частини рівняння на xy ¿ 0:

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

.

Розв'язком його є загальний інтеграл $x+\ln|x|+\ln|y|-y=c$, тобто $\ln|xy|+x-y=c$

Тут рівняння $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ має вигляд $xy=0$. Його розв'язок x =0, y = 0 є розв'язком даного ДР, але не входять у загальний інтеграл.

Виходить, розв'язок x = 0, y = 0 є особливими.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'=-\frac{y}{x}$, що задовольняє умові y(4) =1.

Розв'язання: Цей приклад являє собою розв'язок задачі 2 з п. 1.2.

Маємо: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ або $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$. Проінтегрувавши, одержимо:

$\ln y=\ln c-\ln x$,тобто $y=\frac{c}{x}$ — загальний розв'язок ДР.

Він являє собою, геометрично, сімейство рівносторонніх гіпербол. Виділимо серед них одну, що проходить через точку(4; 1). Підставимо x =4 і y =1 у загальний розв'язок рівняння: $1=\frac{c}{4}$, c = 4.

Одержуємо: $y=\frac{4}{x}$ частинний розв'язок рівняння $y'=-\frac{y}{x}$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок ДР $m\cdot V'=-k\cdot V^2$.

Розв'язання: Цей приклад демонструє розв'язок задачі 1 з п. 1.2. Приведемо дане рівняння до виду (2.5):

$$m\cdot\frac{dV}{dt}=-k\cdot V^2\quad,\qquad m\cdot dV+k\cdot V^2\cdot dt=0\quad,\qquad \frac{dV}{V^2}+\frac{k}{m}\cdot dt=0\quad.$$

Інтегруємо: $\int\frac{dV}{V^2}+\int\frac{k}{m}\cdot dt=-c$, тобто $-\frac{1}{V}+\frac{k}{m}\cdot t+c=0$. Звідси $V=\frac{1}{\frac{k}{m}\cdot t+c}$ - загальний розв'язок рівняння.

Практичне заняття 17

Тема. Лінійні і однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Мета: повторити та закріпити поняття диференціальних рівнянь, лінійних і однорідних дифрівнянь. Формувати вміння та навики розв’язування лінійних і однорідних дифрівнянь.

План

1 Однорідні диференціальні рівняння

2 Лінійні рівняння

1 Однорідні диференціальні рівняння

Студенти повинні знати:

методи розв’язування лінійних і однорідних диференціальних рівнянь

Студенти повинні уміти:

- розв’язувати лінійні диференціальні рівняння
- розв’язувати однорідні диференціальні рівняння

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 341-345.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 470-472.

Функція f(x;y) називається однорідною функцією n -го порядку (виміру), якщо при множенні кожного її аргументу на довільний множник λ вся функція збільшиться на λ^n, тобто

$$f(\lambda\cdot x;\lambda\cdot y)=\lambda^n\cdot f(x;y)\quad.$$

Наприклад, функція $f(x;y)=x^2-2\cdot x\cdot y$ є однорідна функція другого порядку, оскільки

$$f(\lambda\cdot x;\lambda\cdot y)=(\lambda\cdot x)^2-2(\lambda\cdot x)(\lambda\cdot x)=\lambda^2\cdot(x^2-2\cdot x\cdot y)=\lambda^2\cdot f(x;y) \; .$$

Диференціальне рівняння

$$y'=f(x;y)$$)

називається однорідним, якщо функція $f(x;y)$ є однорідна функція нульового порядку.

Однорідне рівняння (2.8) перетвориться у рівняння з *відокремлюваними змінними* за допомогою заміни змінної (підстановки)

$\frac{y}{x}=u$ або, що теж саме, $y=u\cdot x$

Дійсно, підставивши $y=u\cdot x$ й $y'=u'\cdot x+u$ у рівняння , одержуємо

$u'\cdot x+u=\phi(u)$ або $x\cdot\frac{du}{dx}=\phi(u)-u$, тобто рівняння з *відокремлюваними змінними*. Знайшовши його загальний розв'язок (або загальний інтеграл), варто замінити в ньому u на $\frac{y}{x}$. Одержимо загальний розв'язок (інтеграл) вихідного рівняння.

Однорідне рівняння часто подається у диференціальній формі:

$$P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy=0 \; .$$

ДР буде однорідним, якщо $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ — однорідні функції однакового порядку.

Переписавши рівняння у виді $\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ (і застосувавши у правій частині розглянуте вище перетворення, одержимо рівняння $y'=\phi(\frac{y}{x})$).

При інтегруванні рівнянь виду немає необхідності попередньо приводити їх (але можна) до вигляду : підстановка відразу перетворить рівняння у рівняння з *відокремлюваними змінними*.

Відзначимо, що дане рівняння можна було спочатку привести до виду :

$$x^2-y^2+2xy\cdot\frac{dy}{dx}=0 \; , \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \; , \quad y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\cdot\frac{y}{x}} \; .$$

Потім покласти $y=u\cdot x$, тоді $y'=u'x+u$ і т.д.

Лінійні рівняння. Рівняння Я. Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$y'+p(x)\cdot y=g(x)$, де *p(x) і д(x)* — задані функції, зокрема — постійні.

Особливість ДР шукана функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, і не перемножуючи між собою.

Розглянемо два методи інтегрування ДР (2.11) — метод И Бернуллі і метод Лагранжа.

Метод И. Бернуллі

Розв'язок рівняння шукається у виді добутку двох інших

функцій, тобто за допомогою підстановки у *=u v*, де *u =u(x) i v = v(x)* — невідомі функції від *x*, причому одна з них довільна (але не дорівнює нулю дійсно будь-яку функцію у*(x)* можна записати як $y(\chi) = \frac{y(\chi)}{v(\chi)} ¿ v(\chi) = \upsilon(\chi)\cdot v(\chi)$,

де $v(\chi)\neq 0$. Тоді $y'=u'\cdot v+v\cdot u'$. Підставляючи y', y у рівняння , одержуємо: $u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)\cdot u\cdot v=g(x)$ або

$$u'\cdot v+u'\cdot(v'+(x)\cdot v)=g(x).$$

Підберемо функцію v = v(x) так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто розв'яжемо ДР $v'+p(x)\cdot v=0$. Отже, $\frac{dv}{dx}+p(x)\cdot v=0$, тобто $\frac{dv}{v}=-p(x)\cdot dx$. Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|v|=-\int p(x)\cdot dx+\ln|c|.$$

Через довільність вибору функції v(x), можна прийняти с = 1. Звідси

$$v=e^{-\int p(x)\cdot dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію v у рівняння, одержуємо

$$u'\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}=g(x).$$

Отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}=g(x), \quad du=g(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx,$$

$$u=\int g(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx+c$$

Повертаючись до змінної y, одержуємо розв'язок

$$y=v\cdot u=(\int g(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx+c)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}$$

вихідного ДР.

•

Метод Лагранжа (метод варіації довільної постійної)

Рівняння інтегрується у такий спосіб.

Розглянемо відповідне рівняння без правої частини, тобто рівняння y' + p(x)y = 0. Воно називається лінійним однорідним ДР першого порядку. У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\cdot dx. \quad \ln|y|=-\int p(x)\cdot dx=\ln|c_1|$$

Таким чином, $|\frac{y}{c_1}|=e^{-\int p(x)\cdot dx}$, тобто

$y=\pm c_1 e^{-\int p(x)\cdot dx}$, тобто

$y=\pm c_1 e^{-\int p(x)\cdot dx}$ або $y=c\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}$, де $c=\pm c_1$

Метод варіації довільної сталої полягає у тому, що сталу с в отриманому розв'язку заміняємо функцією с(х), тобто с = с(х). Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$y=c(x)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}$$

Знаходимо похідну (для зручності запису користуємося позначенням $e^{f(x)}=\exp(F(x))$:

$$y'=c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)+c(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)\cdot(-p(x)).$$

Підставляємо значення y и y' у рівняння (2.11):

$$c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)-c(x)\cdot p(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx+c(x)\cdot p(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)=g(x)$$

Другий і третій доданки взаємно знищуються, і рівняння прийме вигляд

$$c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)=g(x).$$

Отже, .

$$dc(x)=g(x)\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$c(x)=\int g(x)\cdot\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx+c$$

Підставляючи вираз с(х) у рівність (2.14), одержимо загальний розв'язок ДР

$$y=\left[\int g(x)\cdot\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx+c\right]\cdot\exp(-\int p(x)\cdot dx).$$

Природно, та ж формула була отримана методом Бернуллі

Зауваження. Рівняння виду $(x\text{-}P(y)+Q(y))\text{-}\{y'=R(y)¿$, де $P(y), Q(y), R(y)\neq 0$ — задані функції, можна звести до лінійного, якщо х вважати функцією, а

у — аргументом: *х = х(у)*. Тоді, користуючись рівністю $y'_x=\frac{1}{x'_y}$

,одержуємо $\frac{x\cdot P(y)+Q(y)}{x'}=R(y)$,тобто лінійне відносно х рівняння. Його розв'язок шукаємо у виді *х = u v*, де *u = u(y), v =v(y)* — дві невідомі функції.

Рівняння Я. Бернуллі

Рівняння виду

$$y'+p(x)\cdot y=g(x)\cdot y^n \quad ,n ¿ R, n ¿ 0, n ¿ 1$$

називається *рівнянням Бернуллі*. Покажемо, що його можна привести до лінійного.

Якщо n=0, то ДР — лінійне, а при *n=1* — з відокремлюваними змінними. У загальному випадку, розділивши рівняння (2.15) на $y^n \neq 0$, одержимо:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x) \quad . \qquad (2.16)$$

Позначимо $y^{-n+1} = z$. Тоді $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Звідси знаходимо $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Рівняння (2.16) приймає вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок його відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння (2.15) до лінійного. На практиці ДР (2.15) зручніше шукати методом И. Бернуллі у виді $y = u \cdot v$ (не зводячи його до лінійного).

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x^2 - y^2) \cdot dx + 2 \cdot x \cdot y \cdot dy = 0 \quad .$$

Розв'язання: Дане рівняння однорідне, тому що функції $P(x, y) = x^2 - y^2$ і $Q(x; y) = 2xy$ — однорідні функції другого порядку.

Покладемо $y = u \cdot x$. Тоді $dy = x \cdot du + u \cdot dx$. Підставляємо у вихідне рівняння:

$$(x^2 - u^2 \cdot x^2) \cdot dx + 2x \cdot ux \cdot x \cdot du + 2x \cdot ux \cdot u \cdot dx \quad ,$$

$$x^2 (1 - u^2 + 2u^2) \cdot dx + 2ux^3 \cdot du = 0 \quad ,$$

$$(1 + u^2) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0 \quad ,$$

останнє — рівняння з *відокремлюваними змінними*. Розділяємо змінні

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2} \cdot du = 0$$

і інтегруємо

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1 \ , \quad \ln|x| \cdot (1+u^2) = c_1 \ , \quad |x|(1+u^2) = e^{c_1} \ .$$

Позначимо $c = e^{c_1}$, c > 0. Тоді

$$|x| \cdot (1+u^2) = c \quad .$$

Заміняючи u на $\frac{y}{x}$, одержуємо: $x^2 + y^2 = cx$ - загальний інтеграл вихідного рівняння.

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння $y' + 2xy = 2x$

Розв'язок: Покладемо y = uv. Тоді u'v + uv' + 2xuv = 2x, тобто u'v+ u(u' + 2xv) = 2x. Спочатку розв'язуємо рівняння

v' + 2xv =0:

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x2} \ , \quad du = \int 2x \cdot e^{x2} \cdot dx \ , \quad u = e^{x2} + c \quad .$$

Тепер розв'язуємо рівняння $u^{'}\cdot e^{-x2}+u\cdot 0=2x$ тобто

$$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x2}, \quad du=\int 2x\cdot e^{x2}\cdot dx, \quad u=e^{x2}+c.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння $y=u\cdot v=(e^{x2}+c)\cdot e^{-x2}$,

тобто $y=1+c\cdot e^{-x2}$.

Приклад 3. Розв'язати приклад методом Лагранжа.

Розв'язання: Розв'язуємо рівняння $y^{'}$ + $2xy$ = 0. Маємо $\frac{dy}{y}=-2\cdot dx$, або

$y=c\cdot e^{-x2}$.

Заміняємо c на c(x), тобто розв'язок ДР $y^{'}$ + $2xy$ = 2 x шукаємо у виді $y=c(x)\cdot e^{-x2}$. Маємо

$$y^{'}=c^{'}(x)\cdot e^{-x2}+c(x)\cdot e^{-x2}\cdot(-2x).$$

Тоді

$c^{'}(x)\cdot e^{-x2}-2xc(x)\cdot e^{-x2}+2xc(x)\cdot e^{-x2}=2x$,тобто $c^{'}(x)\cdot e^{-x2}=2x$, або

$$c(x)=\int 2x\cdot e^{x2}dx,$$ або

$$c(x)=e^{x2}+c.$$

Тому $y=(e^{x2}+c)\cdot e^{-x2}$,або $y=1+c\cdot e^{-x2}$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння (x + y) $y^{'}$ = 1.

Розв'язок: З огляду що $y^{'}=\frac{1}{x^{'}}$, від вихідного рівняння переходимо до лінійного рівняння $x^{'}=x+y$.

Застосуємо підстановку x = uv. Тоді $x^{'}=u^{'}\cdot v+u\cdot v^{'}$. Одержуємо: $u^{'}\cdot v+u\cdot v^{'}=u\cdot v+y$, або $u^{'}\cdot v+(v^{'}-v)+y$.

Знаходимо функцію $v: v^{'}-v=0$, $\frac{dv}{v}=dy$, $v=e^{y}$.

Знаходимо функцію $u: u^{'}\cdot e^{y}+u\cdot 0=y$, тобто $u^{'}=y\cdot e^{-y}$, або $u=\int y\cdot e^{-y}\cdot dy$.

Інтегруючи по частинах, знаходимо: $u=-y\cdot e^{¿y}-e^{-y}+c$. Значить загальний розв'язок даного рівняння:

$$x=u\cdot v=(-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+c)\cdot e^{y}, \text{ або } x=-y-1+c\cdot e^{y}.$$