Міністерство освіти і науки України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
_________Л.РОСЛАВЕЦЬ
_____ ___________2019 р.

Методичне забезпечення
практичних занять з дисципліни Вища математика
для студентів II курсу спеціальності

151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Уклав О. КУЗЬМЕНКО.

Розглянуто на засіданні циклової комісії
спеціальних механічних та загально-технічних дисциплін

Протокол №__ від ___ _________ 20__ року

Голова циклової комісії_______________ Т.СЕМЕРНЯ

Практичне заняття №1

Тема: Дії над комплексними числами

Мета: закріпити знання отримані на лекці, навчитись виконувати дії над комплексними числами в арифметичній формі.
Метод: словесний , практичний

План

1 Поняття комплексного числа
2 Дії над комплексними числами
3 Розв`язування прикладів

Студенти повинні знати:
арифметичну форму запису комплексного числа,знати правила виконання дій над комплекснимти числами

Студенти повинні уміти: застосовувати вивчені формули, записувати спряжені комплексні числа

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 88-92

1 Поняття комплексного числа

Означення. **Комплексним числом** називається число виду $a + ib$, де a, $b \in R$, $i^2 = -1$.

Дійсне число a називається **дійсною частиною** комплексного числа $a + ib$, а дійсне число b — його **уявною частиною**. Число i називається **уявною одиницею**.

Означення. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються **рівними**, якщо $a = c$ і $b = d$.

Означення. Два комплексні числа виду $a + bi$ та $a - bi$ називаються **спряженими**.

2 Дії над комплексними числами

Означення. **Сумою** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$:

$$\boxed{a + bi + (c + di) = a + c + (b + d)i.}$$

Приклади

1) $(-3 + 5i) + (4 - 8i) = (-3 + 4) + (5 - 8)i = 1 + (-3)i$;

2) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4$.

Означення. **Різницею** двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число $(a - c) + (b - d)i$.

$$\boxed{a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i.}$$

Приклади

1) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$.

2) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i$.

Означення. **Добутком** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

$\bullet (a + bi)(c + di) = ac + adi + bidi + bci = ac - bd + (ad + bc)i \bullet$

!

Зауваження. На практиці не завжди користуються формулою. Можна комплексні числа множити, як двочлени.

Приклади

1) $(1 - 2i)(3 + 2i) = 3 - 6i + 2i - 4i^2 = 7 - 4i$;

2) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Означення. **Часткою** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Приклад

$$\bullet \boxed{\frac{a + bi}{c + di}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \boxed{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i} \bullet$$

$$\frac{7 - 4i}{3 + 2i} = \frac{(7 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{21 - 12i - 14i + 8i^2}{9 + 4} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i.$$

Практичне заняття №2

Тема: Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Мета: розширити поняття про комплексні числа, навчити ставити у відповідність комплексному числу точку на площині, виконувати операції над комплексними числами в геометричному вигляді

Метод: словесний , практичний

План

1 Геометрична інтерпретація комплексних чисел

2 Геометричне зображення суми і різниці двох комплексних чисел.
3 Модудь комплексного числа
4 Аргумент комплексного числа
5 Розв`язування вправ

Студенти повинні знати:
яка площина називається комплексною, поняття модуля і аргумента комплексного числа

Студенти повинні уміти: застосовувати вивчені формули, зображати комплексні числа і дії над ними на площині

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 7-10.
2 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 86-92.

1 Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Поставимо у відповідність кожному комплексному числу вектор з початком у точці O(0;0) і кінцем у точці M(a;b). Ви знаєте, що такий вектор називають радіус – вектором, а його проекції на осі є координатами вектора. Отже, можна сказати, що геометрични зображенням комплексного числа $z = a + bí$ є радіус – вектор з координатами a і b. Відповідність між множиною комплексних чисел, з одного боку, і множиною точок або векторів площини, з іншого, дає змогу комплексні числа називати векторами аьо точками і говорити, наприклад, про вектор $a + bí$ або про точку $a + bí$.

Протилежним комплексним числам відповідають протилежні вектори.

2 Геометричне зображення суми і різниці двох комплексних чисел.

З геометричної інтерпретації комплексних чисел у вигляді векторів випливає можливість геометричного зображення додавання комплексних чисел. Воно знаходиться до знаходження сум двох векторів за відомим правилом паралелограма.

Нехай дано два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1í$ та $z_2 = a_2 + b_2í$, яким відповідають радіус – вектори OA і OA (малюнок 4). Побудуємо на цих векторах як на сторонах паралелограм. Тоді зображенням суми комплексних чисел z_1 і z_2 буде вектор OB (діагональ паралелограма) справді, при додаванні векторів їх відповідні координати додають. Тому, якщо вектор OA_1 має координати $(a_1;b_1)$, а вектор OA_2 $(a_2;b_2)$, то їх сума – вектор OB – матике координати $(a_1+a_2;b_1+b_2)$. Вектор OB відповідає комплексному числу $(a_1+a_2) + (b_1+b_2)$, яке є сумою чисел z_1 і z_2.

3 Модуль комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = a + bí$ називається значення $\sqrt{a^2 + b^2}$. Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ перетворюється на нуль тільки за умов $a = 0$, $b = 0$.

Модуль комплексного числа $a + bí$ позначається символом $a + bí$. Отже, $a + bí = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Якщо комплексні числа мають один і той самий модуль, то кінці векторів, які зображують ці числа, лежать на колі з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює їх модулю.

4 Аргумент комплесного числа.

Нехай радіус – вектор OA зображує комплексне число $z = a + bí$ (дивіться малюнок 6). Позначимо α кут, який утворює вектор OA з додатним напрямом осі x. Числове значення кута α, виміряного в радіанах, називається аргументом комплексного числа $a + bí$

5 Розв`язування вправ

Приклади: знайти модулі даних комплексних чисел.

1) $5+7í = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$;
2) $–2-3í = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;
3) $8+0í=\sqrt{64} = 8$;
4) $5í= 5$.

Приклади: знайти головне значення аргументу даних комплексних чисел.

1) $z = 1+í$;

Маємо: $tg\ \alpha = 1$. Оскільки $a = 1$ та $b = 1$, радіус – вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить I чверті і тому α - гострий кут. Отже, $= \pi/4$.

2) $z = -2+2\sqrt{3}í$;

Маємо: $tg\ \alpha = 2\sqrt{3}/(-2) = -3$. Тут $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$, тобто радіус – вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить II чверті. Отже, $\alpha = \pi\ 2/3$.

3) $z = -1-í$;

Маємо: $tg\ \alpha = 1$. Радіус – вектор, що відровідає даному комплексному числу, належить III чверті. Отже, $\alpha = \pi\ 5/4$.

4) $z = 1-\sqrt{3}í$;

Маємо: $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$. Тут $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$. Радіус – вектор, що відповідає даному комплексному числу, належить IV чверті. Отже, $= \pi\ 5/3$.

Практичне заняття № 3

Тема: Дії над комплексними числами в різних формах

Мета: повторити та закріпити дії над комплексними числами в різних формах. Виховувати вміння індивідуальної роботи

Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв´язування практичних завдань.

Студенти повинні знати: основні форми комплексних чисел, дії над комплексними числами

Студенти повинні уміти: застосовувати основні поняття і формули для дій над комплексними числами в різних формах

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990. с. 88-92, 98, 103-113.

Теоретичні відомості:

Тема: Дії над комплексними числами в різних формах

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Розглянемо трикутник OAM і запишемо такі співвідношення між його сторонами:

$\frac{a}{r} = \cos\varphi$; $\frac{b}{r} = \sin\varphi$.

Звідси $z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, тобто маємо:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=$$

;

$$z=r(\cos\varphi+$$

;

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ (2)

;

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+}}$$

;

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

, $a\neq 0$.

Подання комплексного числа у вигляді (2) називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Приклад Записати комплексне число $1+i$ у тригонометричній формі (рис. 1.15).

● Згідно з (2) маємо:

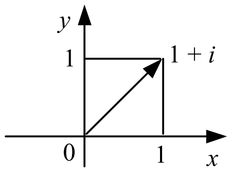


Рис. 1.15

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\ \varphi=\frac{\pi}{4}$$

.

Отже,

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$ ●

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для інших алгебраїчних дій зручніша тригонометрична форма.

Наприклад, добуток двох чисел $z_1=r_1(\cos y_1+i\sin y_1)$ і $z_2=r_2(\cos y_2+i\sin y_2)$ подається так:

$$z_1z_2=r_1r_2\left|\cos(y_1+y_2+i\sin(y_1+y_2))\right|.$$

ПІДНЕСЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА ДО СТЕПЕНЯ

Степенем *p* комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ є число $z^p=r^p(\cos p\varphi+i\sin p\varphi)$, де p — будь-яке ціле число. Ця формула легко виводиться за означенням добутку комплексних чисел.

Приклад Знайти z^6, якщо $z=2(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$.

● $z^6=2^6(\cos 6\cdot 10^\circ+i\sin 6\cdot 10^\circ)=32(1+\sqrt{3i})$. ●

1. Якщо $p=n$ (n — ціле число) і $r=1$, дістаємо **формулу Муавра**:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+$$ (3)

.

Якщо p — ірраціональне, то p-й степінь будь-якого числа має нескінченну множину значень.

Приклад

Подати sin3φ та cos3φ через sinφ та cosφ.

$$\bullet\ \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi i -$$
$$- 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \sin^3\varphi i = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

Прирівнюючи відповідні абсциси та ординати, дістаємо:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\ \cos\ \varphi;$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\ . \bullet$$

2. Якщо $p = 1/n$, маємо:

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \right.\right.}$$

,

$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$ (4)

Приклад

Знайти $z = \sqrt{i}$.

• За формулою (3) $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Далі згідно з (4) (рис. 1.16):

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

.•

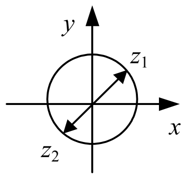


Рис. 1.16

ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Формула Ейлера: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.}$

Згідно з цією формулою комплексне число можна подати в ***показниковій формі***:

$$\boxed{\qquad z}\qquad (5)$$

◆ Справді, нехай r — модуль комплексного числа $z = a + ib$, а φ — головний аргумент. Тоді

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

Беручи до уваги формулу Ейлера, дістаємо:

$$z = re^{i\varphi}.\ ◆$$

Властивості:

1) $e^{(2k\pi + \varphi)i} = e^{\varphi i}$;

• $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$
$e^{(2k\pi + \varphi i)} = e^{2k\pi i}e^{\varphi i} = e^{\varphi i}.\bullet$

2) $e^{2\pi i} = 1$.

Приклад

Обчислити дійсне значення i^i .

$$\bullet\ i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.\ \bullet$$

Практичне заняття 4

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Мета: вивчити метод розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Виховувати вміння індивідуальної роботи

Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Студенти повинні знати:

- методи обчислення визначників;
- формули Крамера.
-

Студенти повинні уміти:

- обчислювати визначники різними методами;
- розв'язувати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, робочі зошити

Література:

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001.-С. 6-12.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

(коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, і вільні члени b_1, b_2 і b_3 вважаються заданими).

Коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3 в системі (1) позначаються однією буквою a з двома індексами, де перший відповідає номеру рівняння, а другий – номеру невідомого.

Щоб розв'язати систему (1), із коефіцієнтів при невідомих і вільних складаються визначники третього порядку Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Визначник Δ, який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Визначники Δ_1, Δ_2, і Δ_3, утворюються з визначника (2) відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв'язуванні системи рівнянь (4) можуть бути такі три випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система (4) має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (3)$$

Формули (3) називають *формулами Крамера*.

1. Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 не дорівнює нулю, то система (4) розв'язків не має.

2. Якщо $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, то система (1) має безліч розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

Розв'язування.

Знаходимо визначники Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами (3)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

Практичне заняття 5

Тема: Матриці. Дії над матрицями

Мета: Вивчення основних понять теорії матриць та матричного методу розв'язування системи лінійних рівнянь. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Дії над матрицями.
2 Практичне завдання.

Студенти повинні знати:

- Правила знаходження суми , різниці, добутку та частки;

Студенти повинні уміти:

- Виконувати дії над матрицями

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, робочі зошити

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.- с 13-18, 24-25.

Сумою матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ є матриця $\mathbf{C}$ з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ на число k є матриця $\mathbf{B}$ з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ розміру $m \times n$ на матрицю $\mathbf{B}$ розміру $n \times k$ є матриця $\mathbf{C}$, розміром $m \times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij}, який стоїть в *i*-му рядку та *j*-му стовпці матриці $\mathbf{C}$, дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці $\mathbf{A}$ на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці $\mathbf{B}$). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків другої матриці

в . Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$AB \neq BA .$$

Слід відзначити, що АЕ = ЕА = А.

Практичне завдання:

Знайти сему та добуток матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Практичне заняття №6

Тема: Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Мета: Вивчення поняття оберненої матриці і матричного способу розв`язування систем рівнянь

Метод: словесний , практичний

План

1 Обернена матриця

2 Матричний метод

Студенти повинні знати: алгоритм знаходження оберненої матриці, і розв`язування системи рівнянь

Студенти повинні уміти: розв`язувати систему рівнянь матричним способом

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 24-25.

1 Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

- Обчислимо:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=15-10=5 .$$

$\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 = 1\\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1\\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = -4\end{cases}$$

методом оберненої матриці.

- Запишемо систему в матричному вигляді $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}.$$

Для матриці A обернену ми побудували в попередньому прикладі, тому за формулою (1.7) маємо:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\\ 2-\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\\ 0-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ — розв’язок системи.

Практичне заняття 7

Тема: Розв'язування задач на пряму і площину.

Мета: Повторити та закріпити основні формули рівнянь прямих на площині і в просторі та рівнянь площин. Формувати вміння та навики застосування рівнянь прямих та площин при розв'язуванні задач.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв’язування вправ.

Студенти повинні знати:

- рівняння прямих на площині;
- рівняння площини;
- умови паралельності та перпендикулярності прямих та площин.

Студенти повинні уміти:

- складати рівняння прямих та площин;
- визначати кути між прямими та площинами, відстань від точки до прямої та площини.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка, креслярські інструменти, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с. 119-144.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 76-88.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування задач на пряму і площину.

Види рівнянь на площині:

$y = kx + b$, де $k = \mathrm{tg}\varphi$. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$ рівняння прямої, що проходить через задану точку

$\boxed{\dfrac{y - y_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$ рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

Якщо задано вектор $\mathbf{s} = \{l,\ m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді $\boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}.}$

$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,}$ рівняння прямої у відрізках на осях.

$\boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}}$ канонічне рівняння прямої.

$Ax + By + C = 0,$ загальне рівняння прямої.

Кут між прямими: $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$, $\boxed{\cos\theta = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.}$

Умова паралельності прямих $k_1 = k_2$., $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

Умова перпендикулярності прямих $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

Відстань від точки до прямої $\boxed{d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$

Загальне рівняння площини $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$ рівняння площини, що проходить через задану точку $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ перпендикулярно до заданого вектора $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

Відстань від точки до площини $\boxed{d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$

Практичне завдання

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку (– 2, 1) і нахилена під кутом 30° до прямої $x - 2y = 3$.

2. Скласти рівняння прямої, що утворює кут 45° із прямою 3x + y – 2 = 0 та проходить через точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

3. На прямій 3x – 3y – 7 = 0 знайти точку, рівновіддалену від точок (3, – 4) і (7, 2).

4. Координати кінців однієї зі сторін квадрата: (–3, –3) і (5, 3). Знайти рівняння його сторін.

Практичне заняття 8

Тема: Розв'язування задач на криві другого порядку

Мета: Повторити та закріпити основні формули кривих другого порядку. Формувати вміння та навики застосування рівнянь прямих та площин при розв'язуванні задач.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв’язування вправ.

Студенти повинні знати:

- рівняння кривих другого порядку

Студенти повинні уміти:

- складати рівняння кривих другого порядку;
- обчислювати ексцентриситет еліпса та гіперболи.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, креслярські інструменти, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 145-171.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001. –С. 97-110.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування задач про криві другого порядку

Еліпс. *Означення*. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

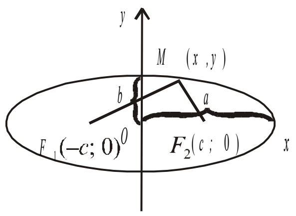


Рис. 2.16

На рис. 2.16 зображено F_1 $(-c, 0)$, F_2 $(c, 0)$ — фокуси еліпса, M (x, y) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c <$ $< 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.20)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2.20). Якщо $x = 0$, $y = \pm\, b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm\, a$ і відповідно $(a, 0)$; $(-a; 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.20) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 2.16 зображено еліпс.

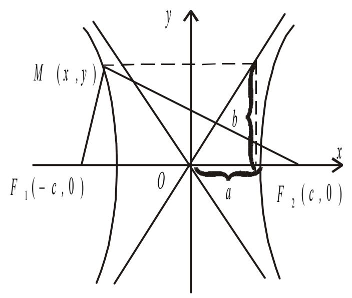
Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 2.17, з якого бачимо, що точки F_1 $(-c, 0)$ і F_2 $(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$



Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю Ox. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm\frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, будуємо графік гіперболи, який зображено на рисунку

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

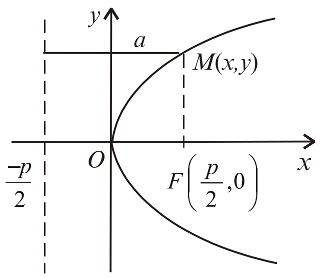
Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: **якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ сталe й дорівнює ексцентриситету, тобто** $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* ε < 1, *і* *гіпербола*, *якщо* ε > 1.

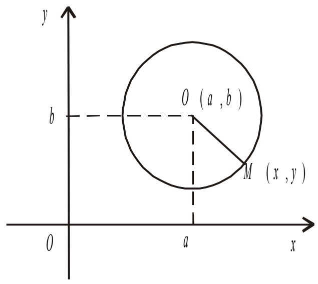
Парабола. *Означення.* Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.



За означенням $r = d$, отже (див. рис. 2.18):

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2},\text{ або } y^2 = 2px$$

— канонічне рівняння параболи, коли ε = 1. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рисунку



Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом*.

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Практичне завдання

1. Знайдемо координати фокуса параболи $y = x^2 - 2x.$

Беручи $y+1=x_1,\ x-1=y_1,$ дістанемо рівняння параболи виду (1) $y_1^2 = x_1.$

Оскільки $2p=1,\ p=\frac{1}{2}$, то фокус F має координати $x_1=\frac{1}{4},\ y_1=0$. Отже, знаходимо координати фокуса $x=1,\ \ y=-\frac{3}{4}.$

2. Знайти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що $b=3,\ ε=0{,}8$.

Маємо рівняння $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{c}{a} = 0{,}8$, $b = 3$, з яких визначаємо $a = 5$. Рівняння еліпса подається так: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

3. Знайдемо ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Маємо: $a = 4$, $b = 3$, $c^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$, $c = 5$, $\varepsilon = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

4. Дано рівняння директрис гіперболи $x = \pm 2$, відстані між фокусами якої дорівнюють 10. Записати канонічне рівняння гіперболи.

З рівностей $\frac{a^2}{c} = 2$, $c = 5$ знаходимо $a^2 = 10$, $b^2 = c^2 - a^2 = = 25 - 10 = 15$, а далі записуємо рівняння $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$.

Практичне заняття 10

Тема: Диференціювання функцій

Мета: Повторити та закріпити поняття похідної, механічний та геометричний зміст похідної, правила диференціювання. Формувати вміння та навики застосування правил диференціювання при знаходженні похідних функцій.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:

- означення похідної;
- механічний та геометричний зміст похідної;
- рівняння дотичної до графіка функції;
- правила диференціювання; таблицю похідних.
-

Студенти повинні уміти:

- знаходити похідні функцій;
- знаходити рівняння дотичної до графіка функції;
- знаходити швидкість матеріальної точки.
-

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, креслярські інструменти, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 205-211.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001. –С. 191-200, 204-209, 211-218.

Теоретичні відомості:

Тема: Диференціювання функцій

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ кутовий коефіцієнт дотичної

Таблиця похідних елементарних функцій

1. Похідна степеневої функції

$$y = x^{\alpha}: \; y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \; \alpha \in R$$

2. Похідна показникової функції

$$y = a^x: \quad y' = a^x \quad \ln a;$$
$$y = e^x: \quad y' = e^x.$$

3. Похідна логарифмічної функції

$$y = \log_a x: \quad y' = \frac{1}{x \ln a};$$
$$y = \ln x: \quad y' = \frac{1}{x}.$$

4. Похідні тригонометричних функцій

$$y = \sin x: \quad y' = \cos x;$$
$$y = \cos x: \quad y' = -\sin x;$$
$$y = \mathrm{tg} x: \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$y = \mathrm{ctg} x: \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$ **:**

$$y' = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Середня швидкість

Середня швидкість тіла, що рухається вздовж деякої лінії, визначається за формулою

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Миттєва швидкість

Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії $s = f(t)$, називається похідна функції $s = f(t)$ за часом t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).}$ рівняння дотичної до графіка функції

Знайти похідні функцій:

1. $(7x^5)' = 7(x^5)' = \underbrace{7}\cdot 5x^4 = 35x^4$

2. $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$.

$$y' = (x^3 + 7x^2 - 5x + 4)' = (x^3)' + (7x^2)' - (5x)' + (4)' = 3x^2 + 14x - 5 + 0$$

3. $y = (x^2 + 1)\ln x$.

$$y' = \left[\underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{\ln}_{v} x\right]' = (x^2+1)'\ln x + (x^2+1)(\ln x)' = 2x\ln x + (x^2+1)\frac{1}{x}.$$

4. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-5}$.

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-5}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-5) - (x^2+1)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} =$$

$$\frac{2x(x^2-5) - 2x(x^2+1)}{(x^2-5)^2} = \frac{-10x - 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{-12x}{(x^2-5)^2}$$

5. $y = \sqrt{x^5 - 10^x}$;

$$g(x) = u = x^5 - 10^x; \quad f(u) = \sqrt{u};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(5x^4 - 10^x\ln 10) = \frac{5x^4 - 10^x\ln 10}{2\sqrt{x^5 - 10^x}}.$$

6. $y = \cos^3(\ln 2x)\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

Візьмемо: $u = \cos^3(\ln 2x)$, $v = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$. Тоді за правилом

$$y' = (\cos^3\ln 2x)'\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{x} + \cos^3(\ln 2x)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)'.$$

Функції $\cos^3\ln 2x$ і $\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ — складні.

$$(\cos^3(\ln 2x))' = 3\cos^2(\ln 2x)\cdot(\cos(\ln 2x))' =$$

$$= 3\cos^2(\ln 2x)(-\sin\ln 2x)(\ln 2x)' = -3\cos^2(\ln 2x)\sin\ln 2x\frac{1}{2x}\cdot 2.$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}.$$

Приклад

Нехай $s=\frac{1}{2}gt^2$ — рівняння вільного руху тіла, g — прискорення його вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу; у момент часу $t = 2$ с.

• За означенням маємо

$$v=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt.$$

Зокрема, якщо $t = 2$, дістаємо:

$v=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6$ м/с.

Приклад

Написати рівняння дотичної до кривої $y = x^3$ у точці $M(1;\ 1)$.

• Оскільки $y' = 3x^2$, то кутовий коефіцієнт дотичної

$$y'|_{x=1}=(3x^2)|_{x=1}=3.$$

Рівняння дотичної буде таке: $y-1=3(x-1)$, або $y=3x-2$.

Практичне заняття 11

Тема: Дослідження функцій на екстремум. Задачі на найбільше та найменше значення функції

Мета: Повторити та закріпити достатні умови монотонності та екстремуму функцій. Формувати вміння та навики застосування диференціального числення до дослідження на монотонність, екстремуми та найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:

- правила диференціювання; таблицю похідних;
- умови монотонності та екстремуму функції.

Студенти повинні уміти:

- Досліджувати функції на монотонність, екстремуми, найбільше та найменше значення функції.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: олівець, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 226-227.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001. –С. 221-227, 236-240.

Теоретичні відомості:

Тема: Дослідження функцій на екстремум. Задачі на найбільше та найменше значення функції

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ кутовий коефіцієнт дотичної

Таблиця похідних елементарних функцій

2. Похідна степеневої функції

$$y = x^{\alpha}: \; y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \; \alpha \in R$$

2. Похідна показникової функції

$$y = a^x: \quad y' = a^x \ln a;$$
$$y = e^x: \quad y' = e^x.$$

3. Похідна логарифмічної функції

$$y = \log_a x: \quad y' = \frac{1}{x \ln a};$$
$$y = \ln x: \quad y' = \frac{1}{x}.$$

4. Похідні тригонометричних функцій

$$y = \sin x: \quad y' = \cos x;$$
$$y = \cos x: \quad y' = -\sin x;$$
$$y = \mathrm{tg} x: \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$y = \mathrm{ctg} x: \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$ **:**

$$y' = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

1. Знайти нулі функції $f'(x)$, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ (якщо вони є), і розбити інтервал $(a; b)$ за допомогою знайдених коренів $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, на інтервали $(a; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_{k-1}; x_k), (x_k; b)$.

2. Визначити знак похідної на кожному із таких інтервалів. Якщо при цьому виявиться, що на двох сусідніх інтервалах $(x_{i-1}; x_i)$ $(x_i; x_{i+1})$ похідна $f'(x)$ має один і той самий знак, то функція строго монотонна в інтервалі $(x_{i-1}; x_{i+1})$. Наприклад, якщо $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростаюча, якщо $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадна.

Строга монотонність за теоремою 6 зберігається, якщо до частинного інтервалу приєднати його кінці, на яких за умовою функція неперервна. Якщо $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ неперервна, а в інтервалі $(a; b)$ похідна $f'(x)$ не перетворюється на нуль, то на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ буде строго монотонною, а саме при $f'(x) > 0$ — зростаючою, при $f'(x) < 0$ — спадною.

Достатні умови строгого екстремуму

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:

1) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий максимум;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку. Розглянемо деякі випадки знаходження найбільших і найменших значень функцій на проміжку, коли функція неперервна і диференційовна на всьому проміжку за винятком точок, де в неї немає скінченної похідної.

І. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a; b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).

2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов’язково виясняти, чи буде в них екстремум).

3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Практичне завдання

1 Знайти проміжки монотонності та екстремуми функцій:

$3x^3 - 9x^2 - 27x + 30;$

$2x^3 - 21x^2 + 36x - 20;$

$\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1;$

$-2x^3 - 15x^2 + 36x + 10;$

$x^3 - 9x^2 + 15x - 3;$

$x^3 - 3x^2 + 6x + 10;$

$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;$

2 Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:
$y = x^2 - 4x + 3$, [0;3].
$y = x^2 - 6x + 13$, [0;6].

Практичне заняття 12

Тема: Безпосереднє знаходження невизначеного інтеграла

Мета: Повторити властивості невизначеного інтеграла та основні табличні інтеграли. Формувати вміння та навики обчислення невизначеного інтеграла методом безпосереднього інтегрування. Виховувати вміння індивідуального

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:

- Таблицю невизначених інтегралів.
-

Студенти повинні уміти:

- Знаходити первісну;
- Знаходити невизначений інтеграл за допомогою табличних інтегралів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: олівець, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 253-255.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001. –С. 252-255.

Теоретичні відомості:

Тема: Безпосереднє знаходження невизначеного інтеграла

Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція f(x)	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \dfrac{x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \quad a \neq 0 \text{ – стала.}$$

2. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то й $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

1) $\int f(kx)dx = \dfrac{1}{k}F(kx) + C$,

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$,

3) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C$,

де k та b - сталі величини.

Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{1-6x+4x^2}{x}dx$, 2) $\int \frac{dx}{x^2+16}$, 3) $\int \frac{3x-5-24x^2}{x}dx$, 4) $\int (3x^2+4)dx.$

5) $\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \right) dx.$

$$\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \right) dx = \int x^2 dx - \int 2x\sqrt{x}dx + \int 3\sqrt[3]{x}dx + \int \frac{5}{x}dx = \int x^2 dx - 2\int x^{3/2}dx + 3\int x^{1/3}dx +$$

$$+5\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{4/3}}{4/3} + 5\ln|x| + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\ln|x| + C.$$

6) $\int \left(5^x - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$

$$\int \left(5^x - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int 5^x dx - 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5^x}{\ln 5} - 3tgx + 4\arcsin x + C.$$

7) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2x - x^4}{x^5} dx.$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2x - x^4}{x^5} dx = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx + 2\int \frac{x}{x^5}dx - \int \frac{x^4}{x^5}dx = \int \left(x^{-\frac{14}{3}} + 2x^{-4} - x^{-1} \right) dx = \frac{x^{-11/3}}{-11/3} + 2\frac{x^{-3}}{-3} -$$

$$- \ln|x| + C = -\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}} - \frac{2}{3x^3} - \ln|x| + C.$$

8)

$\int \left(3\sin 6x - \frac{2}{5x-1} + e^{\frac{x}{3}} \right) dx.$

$$\int \left(3\sin 6x - \frac{2}{5x-1} + e^{\frac{x}{3}} \right) dx = 3\int \sin 6x dx - 2\int \frac{dx}{5x-1} + \int e^{\frac{x}{3}}dx = 3\left(-\frac{1}{6}\cos 6x \right) - 2\cdot\frac{1}{5}\ln|5x-1| + 3e^{\frac{x}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 6x - \frac{2}{5}\ln|5x-1| + 3e^{\frac{x}{3}} + C.$$

Практичне заняття 13

Тема: Знаходження невизначеного інтеграла інтегруванням заміною змінної та частинами

Мета: Повторити умови інтегрування заміною змінної і частинами.
Формувати вміння та навики обчислення невизначеного інтеграла методом інтегрування заміною змінної і частинами. Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

3 Інтегрування заміною змінної.

4 Інтегрування частинами.

Студенти повинні знати:
- метод знаходження невизначеного інтеграла заміною змінної;
- метод знаходження невизначеного інтеграла інтегруванням частинами.

Студенти повинні уміти:
- знаходити невизначений інтеграл заміною змінної;
- знаходити невизначений інтеграл інтегруванням частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, таблиця формул інтегрування, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С.255-266.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 336-337.

Теоретичні відомості:

Тема: Знаходження невизначеного інтеграла інтегруванням заміною змінної та частинами

формула інтегрування підстановкою
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - функція, що має неперервні похідні. Тоді $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Проінтегрувавши цю рівність, отримаємо

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \quad \text{або} \quad \int udv = uv - \int vdu$$

Отримана формула називається ***формулою інтегрування частинами***

Обчислити інтеграли:

1. $\int \cos 5xdx.$

Замінимо змінну $t = 5x,$ тоді $x = \frac{t}{5}$ i $dx = \frac{dt}{5}$. Підставляючи нашу заміну та повертаючись до початкової змінної, маємо:

$$\int \cos 5xdx = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos tdt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C$$

2. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$

Припустимо, що $t = \frac{1}{x}$, тоді $x = \frac{1}{t}$ і $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Підставляючи нашу заміну та повертаючись до початкової змінної, маємо:

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int t^2 e^t \left(-\frac{dt}{t^2} \right) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

3. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

Поклавши $x = t^3$, знайдемо $dx = 3t^2 dt$. Ця підстановка призводить до того, що під знаком синуса зникає корінь і з'являється нова змінна інтегрування. Маємо:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{\sin t \cdot 3t^2 dt}{\sqrt[3]{t^6}} = 3 \int \sin t dt = -3\cos t + C.$$

Повертаємося до початкової змінної x. Підставляючи в результат інтегрування $t = \sqrt[3]{x}$, дістанемо:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3\cos \sqrt[3]{x} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2t - 2\ln|1+t| + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C.$$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}; \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}.$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1+2x^2 = t \\ 4xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{4} tdt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C.$$

7. $\int x^3 e^{-2x^4} dx.$

$$\int x^3 e^{-2x^4} dx = \left| \begin{array}{l} -2x^4 = t \\ -8x^3 dx = dt \\ x^3 dx = -\frac{1}{8} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{8} \int e^t dt = -\frac{1}{8} e^t + C = -\frac{1}{8} e^{-2x^4} + C.$$

8. $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx.$

$$\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx = \left| \begin{array}{l} 2\ln x + 3 = t \\ \frac{2dx}{x} = dt \\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C.$$

Обчислити інтеграли:

1. $\int xe^x dx.$

Припустивши $u = x,\ dv = e^x dx,$ тоді $du = \frac{dx}{x}, v = x$

Звідси за формулою (1.3) матимемо

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2. $\int x\cos x dx.$

Покладемо $u = x, dv = \cos x dx,$ тоді $du = dx, v = \sin x$

Тому, використовуючи формулу (1.3), маємо

$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$

Надалі, після умови вказуються вирази u, dv і v, du.

3. $\int (2x-3)\cdot 4^x dx.$

$$\int (2x-3)\cdot 4^x dx = \begin{vmatrix} u = 2x-3, du = 2dx \\ dv = 4^x dx, v = \frac{4^x}{\ln 4} \end{vmatrix} = (2x-3)\cdot\frac{4^x}{\ln 4} - \int \frac{2\cdot 4^x dx}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\cdot\frac{4^x}{\ln 4} + C$$

4. $\int x^2 e^{3x} dx.$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \begin{vmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{3x}, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x} dx.$$

Щоб знайти $\int xe^{3x}dx$, застосуємо даний метод ще раз.

$$x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{3x}, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = \frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} +$$

$$+\frac{2}{27}e^{3x} + C = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$

5. $\int \lg xdx.$

$$\int \lg xdx = \begin{vmatrix} u = \lg x, du = \frac{dx}{x\ln 10} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\lg x - \frac{1}{\ln 10}\int x\cdot\frac{dx}{x} = x\lg x - \frac{1}{\ln 10}x + C.$$

6. $\int e^x \cos xdx.$

$$\int e^x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = e^x; & du = e^x dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \int \cos xdx = \sin x \end{vmatrix} = e^x\sin x - \int e^x \sin xdx = \begin{vmatrix} u = e^x; & du = e^x d \\ dv = \sin xdx; & v = -\,\mathrm{co} \end{vmatrix}$$

$$= e^x\sin x - \left(-e^x\cos x - \int(-\cos x)e^x dx\right) = e\sin x + e^x\cos x + \int e^x\cos xdx.$$

Припустимо, що $I = \int e^x \cos xdx$

Маємо:

$I = e^x\sin x + e^x\cos x - I$ або $2I = e^x\sin x + e^x\cos x$;

Звідси отримуємо:

$$I = \int e^x\cos xdx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

Практичне заняття 14

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Мета: Повторити умови інтегрування заміною змінної і частинами.
Формувати вміння та навики обчислення визначеного інтеграла методом інтегрування заміною змінної і частинами. Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

1Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної.

2Обчислення визначеного інтеграла частинами.

Студенти повинні знати:

- формулу Ньютона-Лейбніца;
- метод знаходження визначеного інтеграла заміною змінної;
- метод знаходження визначеного інтеграла інтегруванням частинами.

Студенти повинні уміти:

- знаходити визначений інтеграл заміною змінної;
- знаходити визначений інтеграл інтегруванням частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка, таблиця формул інтегрування, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 279-283.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 365-385.

Теоретичні віломості:

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема. **Якщо: 1) $f(x)$ — неперервна для $x\in[a;\ b]$; 2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$; 3) $x=\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ — неперервні для $t\in[\alpha;\ \beta]$; 4) при $t\in[\alpha;\ \beta]\Rightarrow\ x\in[a;\ b]$, то**

$$\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t),\\ dx=\varphi'(t)dt;\\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b\\ \hline t & \alpha & \beta\end{array}\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\displaystyle\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\ \ dx=2tdt\\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9\\ \hline t & 2 & 3\end{array}\end{array}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\ln|t+1|)\Big|_2^3=2(3-\ln4-(2-\ln3))=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема **. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x\in[a;\ b]$, то**

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (2)$$

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x\,dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад . $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{ll} 1+\sqrt{2x+1} = t, & dx = (t-1)dt; \\ x = \dfrac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| =$

$$= \int_2^4 \frac{t-1}{t}dt = \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = (t - \ln|t|)\Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - (2 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

Приклад $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}; \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2\cdot dx}{x} =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Обчислити визначені інтеграли

1. $\displaystyle\int_0^1 (1+e^{3x})^2 e^{3x}dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left((1+e^3)^3 - 8\right)$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. *Відповідь.* $\mathrm{arctg}\,e - \frac{\pi}{4}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$.

Практичне заняття 15

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур

Мета: набуття навичок знаходження площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла. Формувати вміння та навики побудови плоскиї фігур та обчислення їх площ

Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв'язування задач на знаходження площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Студенти повинні знати: геометричний зміст та властивості визначеного інтеграла, що застосовуються до обчислення площ плоских фігур

Студенти повинні уміти: знаходження площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, таблиця невизначених інтегралів, робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 290-294.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 401-405.

Теоретичні віломості:

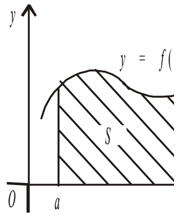
Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур

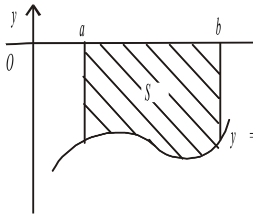
Якою б не була криволінійна фігура, що обмежена неперервними кривими лініями, шляхом її розсікання лініями паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

І. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 2),

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \qquad (7.20)$$





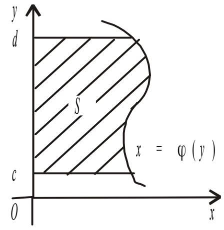


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

II. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \geq 0$. Площа *S* такої фігури буде

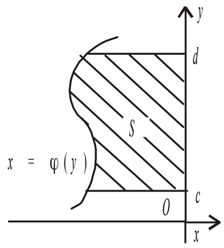
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy, \qquad (1)$$

а якщо $\varphi(y) \leq 0$ (рис. 4), то

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|. \qquad (2)$$

III. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;\ b]$ (рис. 5). Площа *S* такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \qquad (3)$$



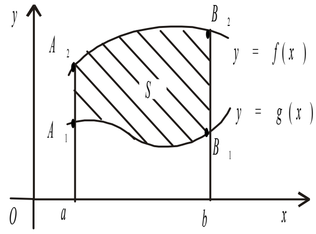


Рис. 4 Рис. 5

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$y = -x^2 + 4x + 5$ та $y = 2x - 3$.

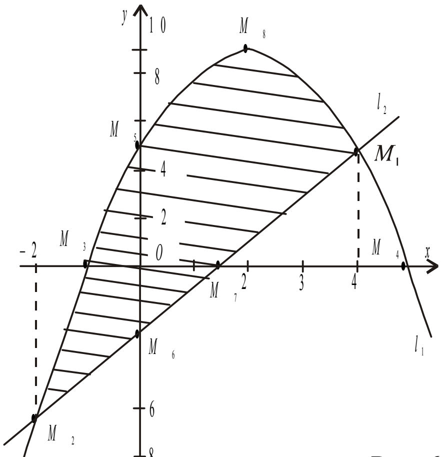


Рис. 6

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y = -x^2 + 4x + 5$ (l_1) та прямою $y = 2x - 3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 6).

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array} \right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array} \right. \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array} \right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y - 9 = -(x - 2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ за формулою (7.23) буде така:

$$S = \int_{-2}^{4} \left(-x^2 + 4x + 5 - (2x - 3) \right) dx = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right) \Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$= -\frac{64}{3} + 16 + 32 - \left(\frac{8}{3} + 4 - 16 \right) = 36.$$

Приклад . Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 + 2y + 6 (l_1)$, $x - 3y = 26 (l_2)$.

● Побудуємо фігуру, обмежену параболою $x = y^2 + 2y + 6$ та прямою $x - 3y = 26$, на координатній площині; при цьому обов'язково треба знайти точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат (рис. 7)

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ x - 3y = 26 \end{cases} \begin{cases} x = 3y + 26 \\ y^2 - y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 26 \\ \left[\begin{array}{l} y = -4 \\ y = 5 \end{array} \right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 14 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 41 \\ y = 5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(14;\ -4) \\ M_2(41;\ 5). \end{array} \right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(6;\ 0).$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y^2 + 2y + 6 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 26 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(0;\ -\frac{26}{3}\right).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 26 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 26 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(26;\ 0).$$

$x = y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow (x - 5) = (y + 1)^2 \Rightarrow M_6(5;\ -1)$ — вершина параболи.

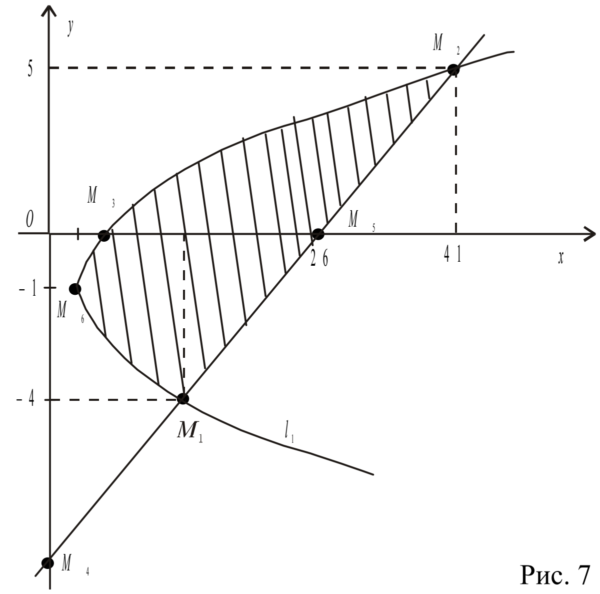


Рис. 7

Для обчислення площі фігури $S_{M_1M_2M_6}$ найбільш зручно скористатись формулою $S=\int\limits_c^d(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))dy$.

Отже, за цією формулою дістанемо:

$$S_{M_1M_2M_6}=\int\limits_{-4}^{5}(3y+26-(y^2+2y+6))dy=\int\limits_{-4}^{5}(-y^2+y+20)dy=$$

$$=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+20y\right)\Bigg|_{-4}^{5}=-\frac{125}{3}+\frac{25}{2}+100-\left(\frac{64}{3}+\frac{16}{2}-80\right)=121{,}5.$$

Обчислити площі фігур:

1 $y=x^2+4x$, $y=x+4$. *Відповідь.* $S=\frac{125}{6}$.

2. $y=-x^2+9$, $y=2x+1$. *Відповідь.* $S=36$.

Практичне заняття 16

Тема. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Мета: повторити та закріпити поняття диференціальних рівнянь. Формувати вміння та навики розв'язування рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

План

1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Студенти повинні знати:

методи розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними

Студенти повинні уміти:

- розв’язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 341-345.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 470-472.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Найбільш простим ДР першого порядку є, рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

У ньому один доданок залежить тільки від x, а інший — від y. Іноді такі ДР називають рівняннями з відокремленими змінними. Проінтегрировавши почленно це рівняння, одержуємо:

$$\int P(x)\cdot dx + \int Q(y)\cdot dy = c$$

— його загальний інтеграл.

Більш загальний випадок описують рівняння з *відокремлюваними змінними*, котрі мають вигляд

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0. \tag{2.6}$$

Особливість рівняння (2.6) у тім, що коефіцієнти при dx і dy являють собою добуток двох функцій (чисел), одна з яких залежить тільки від x,

інша — тільки від y.

Рівняння (2.6) легко зводиться до рівняння (2.5) шляхом почленного поділу його на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$ Одержуємо:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = 0, \qquad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = c$$

— загальний інтеграл.

Зауваження. 1. При проведенні почленного поділу ДР на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ можуть бути загублені деякі розв'язки. Тому варто окремо розв’язати рівняння $Q_1(y)\cdot P_2(x) = 0$ й знайти ті розв'язки ДР, що не можуть бути отримані з загального розв'язку, — особливі розв'язки.

2. Рівняння $y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$ також зводиться до рівняння з відокремленими змінними. Для цього досить покласти $y' = \frac{dy}{dx}$ і розділити змінні.

3. Рівняння $y' = f(ax + by + c)$, де a, b, c — числа, шляхом заміни $ax + by + c = u$ зводиться до ДР з відокремленими змінними. Диференціюючи по x, одержуємо:

$$\frac{du}{dx} = a + b\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Дане рівняння приймає вид $\frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u)$, відкіля випливає

$$\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx .$$

Інтегруючи це рівняння і заміняючи u на $ax + by + c$, одержимо загальний інтеграл початкового рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння $xdx + ydy = 0$

Розв'язок: Дане рівняння є ДР з відокремленими змінними.

Тому $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$ або $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Позначимо $\frac{c}{2} = c_1$.

Тоді $x^2 - y^2 = c$ — загальний інтеграл ДР.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$

Розв'язання: Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y(1 + x)dx + x(1 - y)dy = 0$$

Воно має вигляд (2.6). Поділимо обидві частини рівняння на ху $\neq 0$:

$$\frac{1 + x}{x}dx + \frac{1 - y}{y}dy = 0 .$$

Розв'язком його є загальний інтеграл $x + \ln|x| + \ln|y| - y = c$, тобто $\ln|xy| + x - y = c$

Тут рівняння $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ має вигляд $xy = 0$. Його розв'язок $x = 0$, $y = 0$ є розв'язком даного ДР, але не входять у загальний інтеграл.

Виходить, розв'язок $x = 0$, $y = 0$ є особливими.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = -\frac{y}{x}$, що задовольняє умові у(4) =1.

Розв'язання: Цей приклад являє собою розв'язок задачі 2 з п. 1.2.

Маємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ або $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проінтегрувавши, одержимо:

$\ln y = \ln c - \ln x$,тобто $y = \frac{c}{x}$ — загальний розв'язок ДР.

Він являє собою, геометрично, сімейство рівносторонніх гіпербол. Виділимо серед них одну, що проходить через точку(4; 1). Підставимо $x = 4$ і $y = 1$ у загальний розв'язок рівняння: $1 = \frac{c}{4}$, с = 4.

Одержуємо: $y = \frac{4}{x}$ частинний розв'язок рівняння $y' = -\frac{y}{x}$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок ДР $m \cdot V' = -k \cdot V^2$.

Розв'язання: Цей приклад демонструє розв'язок задачі 1 з п. 1.2. Приведемо дане рівняння до виду (2.5):

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = -k \cdot V^2 , \quad m \cdot dV + k \cdot V^2 \cdot dt = 0 , \quad \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m} \cdot dt = 0 .$$

Інтегруємо: $\int \frac{dV}{V^2} + \int \frac{k}{m} \cdot dt = - c$, тобто $- \frac{1}{V} + \frac{k}{m} \cdot t + c = 0$. Звідси $V = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c}$ - загальний розв'язок рівняння.

Практичне заняття 17

Тема. Лінійні і однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Мета: повторити та закріпити поняття диференціальних рівнянь, лінійних і однорідних дифрівнянь. Формувати вміння та навики розв’язування лінійних і однорідних дифрівнянь.

План

1 Однорідні диференціальні рівняння

2 Лінійні рівняння

1 Однорідні диференціальні рівняння

Студенти повинні знати:

методи розв’язування лінійних і однорідних диференціальних рівнянь

Студенти повинні уміти:

- розв’язувати лінійні диференціальні рівняння
- розв’язувати однорідні диференціальні рівняння

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 341-345.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 470-472.

Функція f(x;y) називається однорідною функцією n -го порядку (виміру), якщо при множенні кожного її аргументу на довільний множник λ вся функція збільшиться на λ^n, тобто

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x;y).$$

Наприклад, функція $f(x;y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y$ є однорідна функція другого порядку, оскільки

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x)^2 - 2(\lambda \cdot x)(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot y) = \lambda^2 \cdot f(x;y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x;y)$$)

називається однорідним, якщо функція $f(x;y)$ є однорідна функція нульового порядку.

Однорідне рівняння (2.8) перетвориться у рівняння з *відокремлюваними змінними* за допомогою заміни змінної (підстановки)

$$\frac{y}{x}=u \quad \text{або, що теж саме,} \qquad y=u\cdot x$$

Дійсно, підставивши $y=u\cdot x$ й $y'=u'\cdot x+u$ у рівняння , одержуємо $u'\cdot x+u=\varphi(u)$ або $x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$, тобто рівняння з *відокремлюваними змінними*. Знайшовши його загальний розв'язок (або загальний інтеграл), варто замінити в ньому u на $\frac{y}{x}$. Одержимо загальний розв'язок (інтеграл) вихідного рівняння.

Однорідне рівняння часто подається у диференціальній формі:

$$P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy=0.$$

ДР буде однорідним, якщо $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ — однорідні функції однакового порядку.

Переписавши рівняння у виді $\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ (і застосувавши у правій частині розглянуте вище перетворення, одержимо рівняння $y'=\varphi(\frac{y}{x})$).

При інтегруванні рівнянь виду немає необхідності попередньо приводити їх (але можна) до вигляду : підстановка відразу перетворить рівняння у рівняння з *відокремлюваними змінними*.

Відзначимо, що дане рівняння можна було спочатку привести до виду :

$$x^2-y^2+2xy\cdot\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}, \quad y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\cdot\frac{y}{x}}.$$

Потім покласти $y=u\cdot x$, тоді $y'=u'x+u$ і т.д.

Лінійні рівняння. Рівняння Я. Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$y'+p(x)\cdot y=g(x)$, де *p(x) і ∂(x)* — задані функції, зокрема — постійні.

Особливість ДР шукана функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, і не перемножуючи між собою.

Розглянемо два методи інтегрування ДР (2.11) — метод И Бернуллі і метод Лагранжа.

Метод И. Бернуллі

Розв'язок рівняння шукається у виді добутку двох інших функцій, тобто за допомогою підстановки у *=u v*, де *u =u(x) і v = v(x)* — невідомі функції від *x*, причому одна з них довільна (але не дорівнює нулю дійсно будь-яку функцію у*(x)* можна записати як $y(\chi)=\frac{y(\chi)}{\nu(\chi)}\cdot\nu(\chi)=\upsilon(\chi)\cdot\nu(\chi)$,

де $\nu(\chi)\neq 0$. Тоді $y'=u'\cdot v+v\cdot u'$. Підставляючи y', y у рівняння , одержуємо: $u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)\cdot u\cdot v=g(x)$ або

$$u'\cdot v+u'\cdot(v'+(x)\cdot v)=g(x).$$

Підберемо функцію v = v(x) так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто розв'яжемо ДР $v' + p(x)\cdot v = 0$. Отже, $\frac{dv}{dx} + p(x)\cdot v = 0$, тобто $\frac{dv}{v} = -p(x)\cdot dx$. Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|v| = -\int p(x)\cdot dx + \ln|c|.$$

Через довільність вибору функції v(x), можна прийняти c = 1. Звідси

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію v у рівняння, одержуємо

$$u'\cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x).$$

Отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x),\quad du = g(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\cdot dx,$$

$$u = \int g(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\cdot dx + c$$

Повертаючись до змінної y, одержуємо розв'язок

$$y = v\cdot u = \left(\int g(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\cdot dx + c\right)\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

вихідного ДР.

•

Метод Лагранжа (метод варіації довільної постійної)

Рівняння інтегрується у такий спосіб.

Розглянемо відповідне рівняння без правої частини, тобто рівняння y' + p(x)y = 0. Воно називається лінійним однорідним ДР першого порядку. У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\cdot dx\ .\ \ln|y| = -\int p(x)\cdot dx = \ln|c_1|$$

Таким чином, $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)\,dx}$, тобто

$y = \pm c_{1e}{}^{-\int p(x)\,dx}$, тобто

$y = \pm c_{1e}{}^{-\int p(x)\,dx}$ або $y = c\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$, де $c = \pm c_1$

Метод варіації довільної сталої полягає у тому, що сталу c в отриманому розв’язку заміняємо функцією c(x), тобто c = c(x). Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$y = c(x)\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

Знаходимо похідну (для зручності запису користуємося позначенням $e^{f(x)} = \exp(F(x))$:

$$y' = c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx) + c(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx)\cdot(-p(x)).$$

Підставляємо значення y и y' у рівняння (2.11):

$$c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx) - c(x)\cdot p(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx + c(x)\cdot p(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx) = g(x)$$

Другий і третій доданки взаємно знищуються, і рівняння прийме вигляд

$$c'(x)\exp(-\int p(x)\cdot dx) = g(x).$$

Отже,

$$dc(x) = g(x)\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$c(x) = \int g(x)\cdot \exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx + c$$

Підставляючи вираз c(x) у рівність (2.14), одержимо загальний розв'язок ДР

$$y = \left[\int g(x)\cdot \exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx + c\right]\cdot \exp(-\int p(x)\cdot dx).$$

Природно, та ж формула була отримана методом Бернуллі

Зауваження. Рівняння виду $(x - P(y) + Q(y)) - y' = R(y)$, де $P(y), Q(y), R(y) \neq 0$ — задані функції, можна звести до лінійного, якщо x вважати функцією, а

y — аргументом: *x = x(y)*. Тоді, користуючись рівністю $y'_x = \frac{1}{x'_y}$,одержуємо $\frac{x\cdot P(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$,тобто лінійне відносно x рівняння. Його розв'язок шукаємо у виді *x = u v*, де *u = u(y), v =v(y)* — дві невідомі функції.

Рівняння Я. Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n, n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1$$

називається *рівнянням Бернуллі*. Покажемо, що його можна привести до лінійного.

Якщо n=0, то ДР — лінійне, а при *n=1* — з відокремлюваними змінними. У загальному випадку, розділивши рівняння (2.15) на $y^n \neq 0$, одержимо:

$$y^{-n}\cdot y' + p(x)\cdot y^{-n+1} = g(x). \qquad (2.16)$$

Позначимо $y^{-n+1} = z$. Тоді $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)\cdot y^{-n}\cdot y'$. Звідси знаходимо $y^{-n}\cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Рівняння (2.16) приймає вид

$$\frac{1}{1-n}\cdot z' + p(x)\cdot z = g(x)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок його відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння (2.15) до лінійного. На практиці ДР (2.15) зручніше шукати методом И. Бернуллі у виді $y = u\cdot v$ (не зводячи його до лінійного).

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x^2 - y^2)\cdot dx + 2\cdot x\cdot y\cdot dy = 0.$$

Розв'язання: Дане рівняння однорідне, тому що функції $P(x, y) = x^2 - y^2$ і $Q(x; y) = 2xy$ — однорідні функції другого порядку.

Покладемо $y = u\cdot x$. Тоді $dy = x\cdot du + u\cdot dx$. Підставляємо у вихідне рівняння:

$$(x^2 - u^2\cdot x^2)\cdot dx + 2x\cdot ux\cdot x\cdot du + 2x\cdot ux\cdot u\cdot dx,$$

$$x^2(1 - u^2 + 2u^2)\cdot dx + 2ux^3\cdot du = 0,$$

$$(1 + u^2)\cdot dx + 2ux\cdot du = 0,$$

останнє — рівняння з *відокремлюваними змінними*. Розділяємо змінні

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2}\cdot du = 0$$

і інтегруємо

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1,\ \ln|x|\cdot(1+u^2) = c_1,\ |x|(1+u^2) = e^{c_1}.$$

Позначимо $c = e^{c_1}$, c > 0. Тоді

$$|x|\cdot(1+u^2) = c.$$

Заміняючи u на $\frac{y}{x}$, одержуємо: $x^2+y^2=cx$ - загальний інтеграл вихідного рівняння.

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння $y'+2xy=2x$

Розв'язок: Покладемо y = uv. Тоді u'v + uv' + 2xuv = 2x, тобто u'v+ u(u' + 2xv) = 2x. Спочатку розв'язуємо рівняння

v' + 2xv =0:

$$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x2},du=\int 2x\cdot e^{x2}\cdot dx\ ,u=e^{x2}+c\ .$$

Тепер розв'язуємо рівняння $u'\cdot e^{-x2}+u\cdot 0=2x$ тобто

$$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x2},du=\int 2x\cdot e^{x2}\cdot dx\ ,u=e^{x2}+c\ .$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння $y=u\cdot v=(e^{x2}+c)\cdot e^{-x2}$,

тобто $y=1+c\cdot e^{-x2}$.

Приклад 3. Розв'язати приклад методом Лагранжа.

Розв'язання: Розв'язуємо рівняння $y'+2xy=0$. Маємо $\frac{dy}{y}=-2\cdot dx$, або $y=c\cdot e^{-x2}$.

Заміняємо с на с(х), тобто розв'язок ДР $y'+2xy=2x$ шукаємо у виді $y=c(x)\cdot e^{-x2}$. Маємо

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x2}+c(x)\cdot e^{-x2}\cdot(-2x).$$

Тоді

$c'(x)\cdot e^{-x2}-2xc(x)\cdot e^{-x2}+2xc(x)\cdot e^{-x2}=2x$,тобто $c'(x)\cdot e^{-x2}=2x$, або $c(x)=\int 2x\cdot e^{x2}dx$,або

$$c(x)=e^{x2}+c\ .$$

Тому $y=(e^{x2}+c)\cdot e^{-x2}$,або $y=1+c\cdot e^{-x2}$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x+y)y'=1$.

Розв'язок: З огляду що $y'=\frac{1}{x'}$, від вихідного рівняння переходимо до лінійного рівняння $x'=x+y$.

Застосуємо підстановку x = uv. Тоді $x'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Одержуємо: $u'\cdot v+u\cdot v'=u\cdot v+y$, або $u'\cdot v+(v'-v)+y$.

Знаходимо функцію $v:v'-v=0,\frac{dv}{v}=dy\ ,v=e^{y}$.

Знаходимо функцію $u:u'\cdot e^{y}+u\cdot 0=y$, тобто $u'=y\cdot e^{-y}$, або $u=\int y\cdot e^{-y}\cdot dy$.

Інтегруючи по частинах, знаходимо: $u=-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+c$. Значить загальний розв'язок даного рівняння:

$$x=u\cdot v=(-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+c)\cdot e^{y},\text{ або } x=-y-1+c\cdot e^{y}\ .$$

Практичне заняття 18

Тема: Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Мета: повторити та закріпити поняття диференціальних рівнянь, лінійних однорідних дифрівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Формувати вміння та навики розв’язування лінійних однорідних дифрівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Методи: словесний, практичний

План:

1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Студенти повинні знати:

- три випадки розв’язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Студенти повинні уміти:

- розв’язувати квадратні рівняння;
- розв’язувати лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 341-345.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 470-472.

Теоретичні віломості:

Лінійні однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами

Частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

де p, q - сталі величини, шукають у вигляді функції $y = e^{kx}$, де k - довільне число. Після підстановки цієї функції у лінійне однорідне рівняння (1) для визначення коефіцієнтів k одержують алгебраїчне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (2)$$

яке називається характеристичним рівнянням даного диференціального рівняння (1).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1) в залежності від коренів характеристичного рівняння (2) має відповідний вигляд:

1) якщо корені дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то

$$y = C_1 e^{k1x} + C_2 e^{k2x}, \qquad (3)$$

2) якщо корені дійсні рівні $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x), \qquad (4)$$

3) якщо корені комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha + \beta i$, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівнянь: 1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 16y = 0$; 3) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

Розв’язання. Складемо відповідні характеристики рівняння для кожного рівняння.

1) $k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2$'

Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

2) $k^2 - 8k + 16 = 0, \quad k_1 = k_2 = 4$. Корені дійсні рівні, то в силу (3) $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

3) $k^2 + 2k + 17 = 0, \quad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm \sqrt{-16} = -1 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)} = -1 \pm 4i;$
$k_{1,2} = -1 \pm 4i; \quad \alpha = -1, \quad \beta = 4.$

Тоді $y = e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Практичне заняття 19

Тема: Дослідження рядів на збіжність

Мета: Формувати вміння та навики досліджувати рядів на збіжність за допомогою ознак порівнянь, Даламбера та Коші Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв´язування прикладів на дослідження рядів за допомогою ознак порівняння, Даламбера та Коші.

Студенти повинні знати:

- ознаки збіжності рядів

Студенти повинні уміти:

- досліджувати ряди за допомогою ознак порівняння, Даламбера та Коші.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 410-414.

Теоретичні віломості:

Тема: Розв´язування прикладів

Ознака Даламбера.

Якщо для ряду з додатними членами $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то: 1) при $\rho < 1$ ряд *збіжний*,

2) при $\rho > 1$ ряд *розбіжний*.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{5} + \frac{9}{25} + \frac{16}{125} + ... + \frac{(n+1)^2}{5^n} + ...$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера.

За умовою маємо $u_n = \frac{(n+1)^2}{5^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{5^{n+1}}$.

Обчислимо

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)^2}{5^{n+1}} : \frac{(n+1)^2}{5^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2 \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} < 1.$$ За ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\ldots+\frac{4^n}{n!}+\ldots$$

Розв'язання. Запишемо n–й та $(n+1)$–й члени заданого ряду

$$u_n=\frac{4^n}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зауваження. $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ (в математиці «!» – знак факторіалу). $(n+1)!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n+1)=n!(n+1)$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{4^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot4\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot4^n}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{(n+1)}=0<1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

<u>Приклад 3</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$1+\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{8}{\sqrt{10}}+\ldots+\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}+\ldots$$

Розв'язання. Оскільки для заданого ряду

$$u_n=\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+4}},\text{ то}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}\cdot2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^n}{2^n}\cdot\sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}}=2>1.$$

Отже, $\rho=2>1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *розбіжний*.

Практичне заняття 20

Тема: Знакозмінні ряди, функціональні ряди

Мета: Вивчити особливості дослідження н збіжність знакозмінних і функціональних рядів

Метод: словесний , практичний

План

1 Знакозмінні ряди

2 Функціональні ряди

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Студенти повинні знати:

- ознаки збіжності знакозмінних та функціональних рядіврядів

Студенти повинні уміти:

досліджувати знакозмінні та функціональні ряди за допомогою ознак

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 508-512

1. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Знакопочерговим рядом називається ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (1)$$

де $u_n > 0$ для $n \in N$ (тобто ряд, додатні і від'ємні члени, якого стоять один за одним по черзі).

Достатня ознака збіжності

Теорема.1 (ознака Лейбніца). *Знакопочерговий ряд (.1) збігається, якщо:*

1 Послідовність абсолютних величин членів ряду монотонно спадає, тоб $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$;

2 Загальний член ряду прямує до нуля: $\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$ *При цьому сума* S *ряду (3* *задовольняє нерівностям*

$$0 < S < u_1 \qquad (2).$$

Зауваження:

1. Дослідження знакопочергового ряду вигляду

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \qquad (3)$$

(з від'ємним першим членом) зводиться шляхом множення всіх його членів на (-1) дослідження ряду (1).

2. Співвідношення (.2) дозволяє отримати просту і зручну оцінку помилки, яку допускаємо, замінюючи суму S даного ряду його частинною сумою S_n. Відкинутий р (остача) є також знакопочерговим рядом $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$, сума якого по модулю мен першого члена цього ряду, тобто $S_n < u_{n+1}$. Тому помилка менша модуля першого відкинутих членів.

2 Знакозмінні ряди.

Знакопочерговий ряд є окремим випадком знакозмінного ряду. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,
містить нескінченну множину додатніх і нескінченну множину від'ємних членів, називає
знакозмінними.

Для знакозмінних рядів має місце наступна загальна достатня ознака збіжності.

Теорема 14.3.2. *Нехай даний знакозмінний ряд* $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ *(3.4)*

Якщо збігається ряд $|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ...,$ *(3.5)*

складений з модулів членів даного ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд(4).

●

3. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних рядів рядів.

Знакозмінний ряд називається ***тим, що абсолютно збігається,*** якщо р
складений з модулів його членів, збігається.

Знакозмінний ряд називається ***тим, що умовно збігається****,* якщо сам
збігається, а ряд, складений з модулів його членів, розбіжний.

3 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$. абсолютно збігається, оскільки ряд, складений **з** модулів й
членів, збігається

Ряди, що абсолютно збігаються, додаються, віднімаються, перемножуються як звича
ряди. Суми таких рядів не залежать від порядку запису членів.

Тому дії над рядами не можна виконувати, не переконавшись в їх абсолютній збіжнос

Для встановлення абсолютної збіжності використовують всі ознаки збіжно
знакопозитивних рядів, замінюючи усюди загальний член ряду його модулем.

2 Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції від *x*, називається ***функціональним****:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots \qquad (4.1).$$

Надаючи *x* певне значення x_0, ми одержимо числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \ldots,$$

Якщо одержаний числовий ряд сходиться, то точка x_0 називається ***точкою збіжнос
ряду*** (4.1); якщо ж ряд розходиться – ***точкою розбіжності функціонального ряду***.
Сукупність числових значень аргументу *x*, при яких функціональний ряд сходить
називається його ***областю збіжності***. В області збіжності функціонального ряду його сум
деякою функцією від *x*: $S = S(x)$. Визначається вона в області збіжності рівністю

$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, де $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ - часткова сума ряду.

Степеневий ряд

степеневий ряд ряд, членами якого є степеневі функції аргументу *x*,***:***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (4.3)$$

Дійсні (або комплексні) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються ***коефіцієнтами ряду*** (4
$x \in R$ - дійсна змінна.

З'ясуємо питання про збіжність степеневого ряду (4.3). Область збіжності степенев
ряду (4.3) містить принаймні одну точку *x = 0* (ряд (4.4) сходиться в точці $x = x_0$).

Теорема 14.5.1 (Абеля). *Якщо степеневий ряд (4.3) сходиться при* $x = x_0 \neq 0$, *то
абсолютно сходиться при всіх значеннях x, що задовольняють нерівності*

$y|x| < y|x_0|$.

Наслідок 14.5.1. *Якщо ряд (4.3) розходиться при x = x_1, то він розходиться і при всі* *що задовольняють нерівності* $|x| > |x_1|$.

Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду

З теореми Абеля виходить, що якщо $x_0 \neq 0$ є точка збіжності степеневого ряду, інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь складається з точок збіжності даного ряду; при всіх значеннях x п цим інтервалу ряд (4.3) розходиться.

Рис . 2

Інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ називають ***інтервалом збіжності степеневого ряду***. Поклав що $|x_0| = R$, інтервал збіжності можна записати у вигляді $(-R;R)$. Число R називаю ***радіусом збіжності степеневого ряду***, тобто

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ Аналогічно, ознакою Коші $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Зауваження:

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можна переконатися, що ряд (4.3) абсолютно сходиться на в числовій осі. В цьому випадку $R = \infty$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то R=0 . Інтервал збіжності степеневого ряду (4.4), що шукаєт з нерівності $|x - x_0| < R$; має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Якщо степеневий ряд містить не всі степені *x*, тобто заданий неповний степеневий р то інтервал збіжності ряду знаходять без визначення радіусу збіжності (формули (5.1) і (5. а безпосередньо застосовуючи ознаку Даламбера (або Коші) для ряду, складеного з моду членів даного ряду.

Приклад 1. Обчислити приблизно суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n^n}$.

Він збігається. Можна записати: $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - ... = S.$ замінивши S на

$S_5 = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{5^5} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{256} + \dfrac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$

зробимо помилку, меншу, ніж $\dfrac{1}{6^6} = \dfrac{1}{46656} < 0{,}00003.$ Отже, $S \approx 0{,}7834.$

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$

○ Це знакопочерговий ряд збігається. Однак ряд, складений з модулів членів дан ряду, $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n},$ розбіжний (гармонійний ряд)..

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

○ Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою (5.1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2.$$

Отже, ряд сходиться при $-2 < x + 2 < 2$, тобто при $-4 < x < 0$. При $x = -4$ маємо р $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$, який сходиться за ознакою Лейбніца. При $x = 0$ маємо ряд, розходиться $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Отже, областю збіжності початкового ряду є піввідрізок [- 4;0)

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$

○ Заданий ряд неповний. Скориставшись ознакою Даламбера для даного ряду, має $|u_n|=\dfrac{|x^{2n-1}|}{2n-1}$, $\quad |u_{n+1}|=\dfrac{|x^{2n+1}|}{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|}=|x^2|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=x^2$.

Ряд абсолютно сходиться, якщо $x_2 < 1$ або $-1 < x < 1$. Дослідемо поведінку ряду кінцях інтервалу збіжності. При $x = -1$ маємо ряд $-1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\cdots$, який сходиться за ознак Лейбніца. При $x = 1$ маємо ряд $+1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ - цей ряд теж сходиться за ознакою Лейбні Отже, областю збіжності початкового ряду є відрізок [-1;1]. ●

Практичне заняття 21

Тема: Випадкові події. Імовірність випадкової події. Операції над подіями

Мета: вивчення понять випадкової величини, імовірність випадкової величини, перестановки, розміщення, комбінації; операцій дій над подіями. Розвиток логічного мислення, уваги, пам´яті, уявлення.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Випадкові події.
2 Практичне завдання.

Студенти повинні знати:

- означення випадкової події, їх види та правила виконання дій над ними

Студенти повинні уміти:

-знаходити ймовірність випадкових подій та уміти виконавати дії над ними

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.- С. 370-379.

Теоретичні відомості:

Тема: Випадкові події. Імовірність випадкової події. Операції над подіями

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVII століття. Тоді були дуже поширені азартні ігри, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку. До таких ігор належать ігри з кубиками, гра в «орлянку», деякі карточні ігри. Б. Паскаль і П. Ферма в листуванні з приводу задач, які виникли в зв'язку з азартними іграми, запровадили поняття ймовірності. Для розв'язання таких задач існуючий тоді математичний апарат виявився недостатнім, і було закладено основи нової науки. Нині теорія ймовірностей широко застосовується в фізиці і в біології, у техніці, в різних галузях народного господарства.

Первісним поняттям теорії ймовірності є поняття події.

Подія — це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: A, *B, C*... Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (експерименту, досліду).

Випробування — це умови, в результаті яких відбувається (чи не відбувається) подія.

Наприклад, випробування — підкидання монети, події: A — «поява герба», *B* — «поява цифри»; випробування — підкидання кубика, події: A — «поява 1 очка», *B* — «поява 2 очок», *C* — «поява 3 очок», *D* — «поява 4 очок», *E* — «поява 5 очок»,*G* — «поява 6 очок».

Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Наприклад: під час витягування навмання однієї карти з колоди ви взяли короля. Подія A — «взято короля» є випадковою.

Випадкові події можуть бути масовими та одиничними.

Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені (можна спостерігати) необмежену кількість разів.

Наприклад, влучення або промах в серії пострілів; поява бракованих деталей при серійному випуску; радіоактивний розпад атомів речовин і т. д.

Прикладом одиничної випадкової події є падіння Тунгуського метеорита.

Теорія ймовірностей вивчає лише масові випадкові величини.

Вірогідною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика натурального числа, меншого за 7» — є вірогідною.

Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика цифри 7».

Виконання вправ

1. Наведіть приклади вірогідних подій.
2. Наведіть приклади неможливих подій.
3. Які із подій є вірогідними:

А — «два попадання при трьох пострілах»;
Б — «навмання вибране трицифрове число не більше 1000»;
С — «випадання 12 очок при киданні двох гральних кубиків»;
Е — «випадання цифри 3 при киданні монети»?

4. Які із подій є неможливими:

А — «випадання 13 очок при киданні двох гральних кубиків»;
В — «поява слова «мама» при випадковому наборі букв а, а, м, м».
С — «чотири попадання при трьох пострілах»;
D — «поява на одній грані грального кубка числа 8»?

Повна група подій, попарно несумісні події, рівноможливі події, елементарні події.

Повною групою подій називається множина подій таких, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із них.

.

Попарно несумісні події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

У теорії імовірностей розрізняють **прості** й **складені** події. Наприклад, під час кидання двох костей у сумі випало 2 очки. Це **проста** подія.

Подія називається ***складеною,*** *якщо поява її залежить від появи інших, простих подій.*

Наприклад, під час кидання двох гральних кубиків у сумі випало 10 очок. Ця подія є складеною, бо вона може складатися з трьох простих подій:

- на першому кубику випало 4, а на другому — 6 очок;
- на першому і на другому кубиках випало по 5 очок;
- на першому кубику випало 6, а на другому — 4 очки.

Обчислювати імовірності складених подій за формулою Р(А) = ~ буває складно, а інколи й неможливо. їх імовірності обчислюють через імовірності простих подій, з яких утворюються складені. Таке обчислення спирається на застосування так званих теорем додавання і множення несумісних однаково можливих подій, які утворюють повну групу.

Введемо спочатку поняття про суму подій. Це поняття аналогічне поняттю суми чисел.

Сумою подій А і *В* ***називається подія*** *С,* ***яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події А, або події*** *В,* ***або обох разом.***

Суму двох подій позначають **C = A + B.**

Приклад. Подія А — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ -подія, яка означає влучення в ціль взагалі (не має значення з якого — першого, другого або обох пострілів).

Сумою ***C*** *двох несумісних подій* ***A і B є*** *подія, яка полягає у здійсненні або події А, або події* ***B.*** *Одночасна поява подій А і В виключена.*

Теорема (теорема додавання).

Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорему додавання застосовують для розв'язування тих задач, в яких ідеться про появу або події A_1*, або події* A_2*, ..., або події* A_n.

З теореми додавання випливають два наслідки. Наслідок 1. Сума імовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$

Перш ніж формулювати другий наслідок з теореми додавання, введемо означення протилежних подій.

Дві події називаються *протилежними*, якщо одна і лише одна з них обов'язково здійсниться в даному випробуванні.

Наприклад, влучення і промах під час одного пострілу, безвідмовна робота всіх елементів технічної системи і вихід з ладу одного з них.

Якщо А — деяка подія, то протилежна їй позначається А .

Події А і А утворюють повну групу несумісних подій.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(A) = 1 .$$

У задачах на обчислення імовірностей інколи зручно обчислювати шукану імовірність події А через імовірність протилежної події за формулою

$P(A) = 1 - P(A) .$

*Задача***.** Імовірність того, що день буде сонячним 0,85. Знайти імовірність того, що день буде похмурим.

$P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0,85 = 0,15$

Теорема множення імовірностей

Введемо спочатку поняття добутку подій.

Добутком двох подій А і В називається подія С, що полягає у здійсненні під час одиничного випробування і події А, і події В.

$$C = AB$$

Добутком двох подій A і ***B*** *називається подія AB, яка полягає у сумісній появі цих подій.*

Для добутку n подій використовуються позначення $C = A_1A_2 \ldots A_n$

Задача. В урні лежать 4 чорних, 7 червоних, 9 зелених і 11 синіх кульок. З урни вийняли одну кульку. Визначити імовірність того, що вийнята кулька буде кольоровою (не чорною).

Розв'язання. Нехай подія A — поява кольорової кульки, A_1 - поява чорної, A_2 - поява червоної, A_3 - поява зеленої, A_4 - поява синьої кульки. Тоді подію A можна виразити як суму несумісних подій A_2, A_3, A_4, тобто $A = A_2 + A_3 + A_4$. За теоремою додавання, дістанемо

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4),$$

$$P(A)=\frac{7}{31}+\frac{9}{31}+\frac{11}{31}=\frac{27}{31}=0.87$$

Приклад. Поява 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок під час одного кидання грального кубика є сукупність шести несумісних подій, які утворюють повну групу. При цьому $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(\mathbf{A_п}) = \frac{1}{6}$.

Тому

$$\mathbf{P(A_1) +} P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

Практичне заняття 22

Тема: Елементи комбінаторики

Мета: ознайомитись основними поняттями теорії ймовірностей і елементами комбінаторики .Розвивати логічне мислення, самостійність

Метод: словесний, практичний

План

1 Теорія ймовірностей , основні поняття
2 Практичне завдання

Студенти повинні знати:

- основні поняття теорії ймовірностей та елементи комбінаторики

Студенти повинні уміти:

-обчислювати ймовірність подій використовуючи елементи комбінаторики

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.- С. 362- 366.

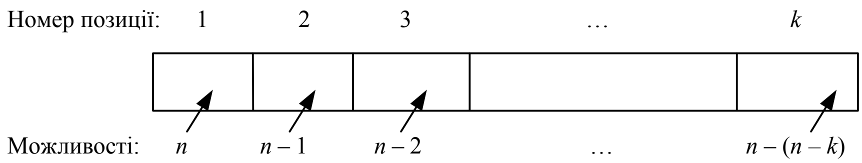
Означення. **Розміщенням** з m елементів по n називаються такі сполуки, з яких кожна містить n елементів, узятих із даних m елементів і таких, що відрізняються одна від одної або елементами, або порядком елементів.

Число всіх можливих розміщень з m елементів по n дорівнює добуткові n послідовних цілих чисел, з яких найбільше m. Позначаємо так A_m^n; A — перша літера французького слова «arrangement», що означає «розміщення». Тоді

$$\boxed{A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)] = \frac{m!}{(m-n)!}}.$$

$n!$ (читаємо: n факторіал), $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Ілюстрація. Розглянемо n елементів, які можна розмістити на k позиціях.



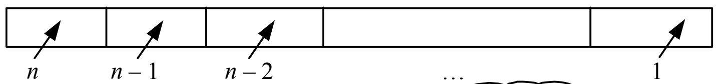
ПЕРЕСТАВЛЕННЯ

Означення. Розміщення з m елементів, узятих по m, тобто розміщення, які різняться лише порядком елементів, називаються **переставленнями**.

Число всіх можливих переставлень із m елементів позначається P_m (P — початкова літера французького слова «permutation» — переставлення)

$$\boxed{P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\cdots 1 = m!} \qquad (7)$$

Ілюстрація. Нехай маємо n елементів та n позицій.



Вважають за означенням: $0! = 1$

КОМБІНАЦІЇ

Означення. Розміщення з m різних елементів по n у кожній групі, де порядок елементів неістотний, називається **комбінацією із *m* елементів по *n***.

Число всіх можливих сполучень (комбінацій) з m елементів по n позначається C_m^n (C — початкова літера латинського слова «combinare» — з'єднувати).

$$C_m^n = C_m^{m-n};$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \equiv \binom{m}{n};$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}; \tag{8}$$

$$C_m^1 = \binom{m}{1} = m; \quad C_m^0 = \binom{m}{0} = 1.$$

Практичне завдання

1 $A_4^2 = 4(4-1) = 4 \cdot 3 = 12;$
$A_8^4 = 8(8-1)(8-2)(8-3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$

2 На першому курсі студенти мають 10 навчальних предметів і 5 різних занять на день. Скількома способами можна скласти відповідний розклад?
Усі можливі набори предметів становлять усі можливі розміщення з 10 елементів по 5. Отже, усіх таких способів існує

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\ 240. \bullet$$

3 Із 10 кандидатів на одну й ту саму посаду мають бути обрані троє. Скільки існує варіантів вибору?

$$\bullet\ C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120. \bullet$$

4 Скількома способами можна вибрати 13 карт із колоди, в якій 52 карти?

Практичне заняття 23

Тема: Додавання та множення ймовірностей

Мета: ознайомитись з теоремами додавання та множення ймовірностей та вивчити випадки їх застосування

Метод: словесний , практичний

План

1 Теорема додавання ймовірностей

2 Теорема множення ймовірностей

Студенти повинні знати:

- означення випадкової події, їх види та правила виконання дій над ними

Студенти повинні уміти:

-знаходити ймовірність випадкових подій та уміти виконавати дії над

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 522-528.

1 Теорема додавання ймовірностей

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У противному разі випадкові події A і B називаються *неза-лежними*.

Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A\ /\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0. \qquad (17)$$

Аналогічно

$$P(B\ /\ A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad P(A)\neq 0\ . \qquad (18)$$

1. $P(A\ /\ B) = 0$, якщо $A\cap B = \varnothing$.

2. $P(A\ /\ B) = 1$, якщо $A\cap B = B$.

3. У решті випадків $0 < P(A\ /\ B) < 1$.

2 Теорема множення ймовірностей

Згідно із (17) і (18) маємо:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A\ /\ B) = P(A)\, P(B\ /\ A). \qquad (19)$$

Формула множення для n залежних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots A_4$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2\ /\ A_1)\, P(A_3\ /\ A_1A_2) \ldots P(A_n\ /\ A_1A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (20)$$

Множення ймовірностей для незалежних випадкових подій

Якщо випадкові події A і B є незалежними, то $P(A\ /\ B) = P(A)$, $P(B\ /\ A) = P(B)$. Формули (19), (20) наберуть такого вигляду:

$$P(A\cap B) = P(A)\, P(B);$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)\ .$$

Нехай проводиться n незалежних спроб, у кожній з яких може відбутися подія A_i (i =1, 2, 3, ... n) з імовірністю $P(A_i) = p_i$ або подія $\overline{A_i}$ $\left(A_i \cup \overline{A_i} = \Omega,\ A_i \cap \overline{A_i} = \varnothing\right)$ з імовірністю $P\left(\overline{A_i}\right) = q_i$, $\left(p_i + q_i = 1\right)$.

Нехай C — поява події A_i хоча б один раз при n незалежних спробах, тобто ця подія може з'явитися або один раз, або двічі, тричі і так далі, включаючи всі n раз. Тоді подія C і подія, яка полягає в тому, що при n спробах A_i не з'явиться жодного разу $\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_4 = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)$, утворюють повну групу, а саме: $C \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = \Omega$. При цьому $C \cap \left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}\right) = \varnothing$.

Тоді $P\left(C \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)\right) = P(C) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = P(\Omega) = 1$;

$$P(C) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A}_i\right).$$

Отже,

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i\ .$$

Якщо $P(A_i) = p_i = p = \text{const}$, то $q_i = q = \text{const}$.

Тоді

$$P(C) = 1 - q^n.$$

Приклад 1. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8.

Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай $p_1 = 0{,}95$ — імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}85$; $p_4 = 0{,}8$. Імовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$$

$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

На підставі (23) маємо:

$$P(C) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985.$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв'язання. Імовірність того, що при одному підкиданні з'явиться цифра 3, дорівнює $\frac{1}{6}$. Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Згідно з (24) дістанемо:

$$P(C) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

Приклад 3. В урні міститься 10 однакових кульок, із них 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться чорною і друга також.

Розв'язання. Позначимо через A появу чорної кульки при першому вийманні, а через B — при другому. Випадкові події A і B будуть залежними, оскільки поява чорної кульки при першому її вийманні з урни (випадкова подія A) впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (випадкова подія B) при другому вийманні.

Приклад 4. З урни, де шість білих і чотири чорні кульки, вийняли дві кульки по одній, при цьому перша кулька в урну повертається.

З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша виявиться чорною, друга також.

Розв'язання. Нехай A — поява чорної кульки при першому вийманні, а B — при другому. Поява чорної кульки при першому вийманні (здійснилась подія A) не впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (подія B) при другому вийманні, оскільки співвідношення між чорними та білими кульками в цьому разі не змінюється.

Приклад 5. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A — три деталі виявляться стандартними;
2) B — усі три виявляться бракованими;
3) C — дві стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i — поява стандартної, $\overline{A_i}$ — бракованої деталі при i-му вийманні.

Подія $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$,

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(A_3 / A_1A_2) = \frac{9}{15}\frac{8}{14}\frac{7}{13} = \frac{12}{65};$$

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2}/\overline{A_1})\,P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = \frac{6}{15}\frac{5}{14}\frac{4}{13} = \frac{6}{91}.$$

$$P(C) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\right) =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(\overline{A_3} / A_1A_2) + P(A_1)\,P(\overline{A_2} / A_1)\,P(A_3 / A_1\overline{A_2}) +$$

$$+ P(\overline{A_1})\,P(A_2 / \overline{A_1})\,P(A_3 / \overline{A_1}A_2) = \frac{9}{15}\frac{8}{14}\frac{6}{13} + \frac{9}{15}\frac{6}{14}\frac{8}{13} + \frac{6}{15}\frac{9}{14}\frac{8}{13} = \frac{216}{455}.$$

Приклад 6. Із множини чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти — друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?

Розв'язання. Позначимо через A_1 — поява непарної цифри при першому вийманні, через B_1 — поява парної цифри при першому, а через B_2 — появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай C — випадкова подія: поява парного двоцифрового числа.

Тоді $C = (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

$$P(C) = P(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) =$$

$$= P(A_1)\,P(B_2 / A_1) + P(B_1)\,P(B_2 / B_1) = \frac{5}{9}\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\frac{3}{8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

Практичне заняття 25

Тема: Закони розподілу випадкових величин

Мета: Вивчення поняття дискретної випадкової величини, законів розподілу і числові характеристики

Метод: словесний , практичний

План

1 Випадкові величини

2 Закони розподілу

3 Числові характеристики

Студенти повинні знати:

-закони розподілу випадкових величин

Студенти повинні уміти:

-знаходити числові характеристики

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 525-533.

1. Біноміальний закон розподілу

Імовірності в цьому законі визначаються за формулою $P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, $m = 0,1,2, \dots, n$. Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з імовірністю p. Частота настання події A має біноміальний закон розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX=np,\ DX=np(1-p).$$

Приклад 1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання. Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу: $P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, $m=0,1,2,\dots,n$;

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X\geq 3)=C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2+0{,}8^5=0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=0{,}94208.$$

3. Геометричний розподіл

Закон подається формулою: $P(X=m)=p(1-p)^{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$.

Геометричний закон розподілу має частота настання події у схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. У формулі p — імовірність настання події в кожному випробуванні. Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $MX=\frac{1}{p}$, $DX=\frac{1-p}{p^2}$.

Приклад 2. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X — кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, …. Побудуємо закон розподілу цієї величини. Вона набуває значення, що дорівнює нулю, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено; $P(X=0)=p=0{,}2.$ Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то X = 1; $P(X=1)=p(1-p).$ Аналогічно $P(X=2)=p(1-p)^2$, $P(x=3)=p(1-p)^3$, …, $P(X=k)=p(1-p)^k,\ldots$. Для обчислення математичного сподівання і дисперсії зіставимо здобутий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P(Y=m)=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\ldots$ Очевидно, що $X=Y-1.$ Скориставшись властивостями математичного сподівання та дисперсії, дістанемо:

$$MX=M(Y-1)=MY-1=\frac{1}{p}-1=5-1=4. \qquad DX=D(Y-1)=DY=\frac{1-p}{p^2}=20.$$

4. Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X=m)=\frac{C_k^m\cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m=0,1,2,\ldots,n;\ k\geq n.$$

Наприклад, імовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N, m виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (k — кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$MX=\frac{kn}{N},\ DX=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p=\frac{k}{N}.$ Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a=\frac{nk}{N}.$

Приклад 3. Партія містить 200 виробів, серед яких 25 бракованих. Для перевірки якості з партії відібрали 10 виробів. Якщо при цьому кількість бракованих виробів не перевищує одиниці, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято. Визначити цю саму ймовірність, якщо апроксимувати гіпергеометричний розподіл біноміальним розподілом і законом розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу гіпергеометричного закону розподілу. Партію буде прийнято, якщо кількість бракованих серед дібраних 10 дорівнюватиме нулю або одиниці.

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{C_{175}^{10}}{C_{200}^{10}} + \frac{C_{25}^{1} \cdot C_{175}^{9}}{C_{200}^{10}} \approx 0{,}638.$$

Обчислимо цю саму ймовірність за допомогою формули біноміального закону розподілу, $p = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{9} \approx 0{,}639.$$

Обчислимо, нарешті, цю саму ймовірність за допомогою закону розподілу Пуассона:

$$a = np = 10 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}25. \quad P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1{,}25} + 1{,}25e^{-1{,}25} \approx 0{,}644.$$

Як бачимо, похибки обчислення в разі апроксимації гіпергеометричного розподілу порівняно невеликі.

5. Рівномірний закон розподілу

Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має рівномірний закон розподілу. Щільність такого розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a; \\ \frac{1}{b - a}, & \text{якщо } a < x \le b; \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Рівномірний закон розподілу легко моделювати. За допомогою функціональних перетворень із величин, розподілених рівномірно, можна діставати величини з довільним законом розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{a + b}{2}, \; DX = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Приклад 4. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X \ge 3) = 0{,}4$, а $MX = 2$.

Розв'язання. Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b - a}$. Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \int_3^b \frac{1}{b - a} dx = 0{,}4; \\ \int_a^b \frac{x}{b - a} dx = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b - 3}{b - a} = 0{,}4; \\ \frac{a + b}{2} = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}6b + 0{,}4a = 3; \\ b = 4 - a. \end{cases} \quad b = 7, \; a = -3.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -3; \\ 0{,}1, & \text{якщо } -3 < x \le 7; \\ 0, & \text{якщо } x > 7. \end{cases}$$

Практичне заняття 25

Тема: Дискретна випадкова величина. Закон розподілу дискретної випадкової внличини

Мета: Вивчення поняття дискретної випадкової величини, законів розподілу і числові характеристики

Метод: словесний , практичний

План

1 Випадкові величини

2 Закони розподілу

3 Числові характеристики

Студенти повинні знати:

- означення випадкової події, їх види та правила виконання дій над ними

Студенти повинні уміти:

-знаходити ймовірність випадкових подій та уміти виконавати дії над

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 532-542.

1 Випадкові величини

Випадковою називається величина, яка може набувати різних числових значень. Строгіше означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій, називається ***випадковою величиною***. Позначають випадкові величини X.Y.Z а їх значення xyz

Випадкова величина ***дискретн,*** якщо множина її значень скінченна.

Неперервному простору елементарних подій відповідає ***неперервна випадкова величина***.

Співвідношення між значеннями x_1 x_2 x_3 випадкової величини X і їхніми ймовірностями

p_1 p_2 p_3 1називається ***законом розподілу випадкової величини***.

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, що їх набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

Якщо $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, або, якщо величина набуває зліченної множини значень, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

2 Закони розподілу

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються у табличній формі (подаються значення випадкової величини і їхні ймовірності),

x_i	x_1	x_2	,,,	x_n
$p($	p_1	p_2	,,,	p_n

аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$; сполучивши точки відрізками прямих, дістанемо многокутник розподілу ймовірностей). Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є ***функція розподілу*** $F(x) = P(X < x)$. Для дискретних величин $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p(x_i)$.

Функція розподілу — неспадна, неперервна зліва, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Якщо X — неперервна випадкова величина, то $F(x)$ — неперервна і диференційована; її похідна $f(x) = F'(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***. При цьому $f(x)$ — невід’ємна функція, для якої $P(\alpha \le X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

3 Числові характеристики

Математичним сподіванням, або середнім значенням, MX випадкової величини, називається ряд $\sum\limits_{i} x_i p_i$ (для дискретних випадкових величин) і інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (для неперервних випадкових величин), якщо вони абсолютно збіжні. Математичне сподівання має такі властивості:

1) $MC = C$ (C — стала);
2) $MCX = CMX$;
3) $M(X+Y) = MX + MY$;
4) $MXY = MX \cdot MY$, якщо X і Y — незалежні випадкові величини.

Дисперсія (позначається через DX) випадкової величини X визначається за формулою:

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) $DC = 0$;
2) $DCX = C^2 DX$;
3) $D(X+Y) = DX + DY$, якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення (позначається літерою σ) є квадратним коренем із дисперсії.

Приклад Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Ймовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X — кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти MX і DX, а також імовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв'язання. Подамо закон розподілу для випадкової величини X у табличній формі. Очевидно, що випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення X = 1, буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь, а з другої — придатну. За теоремою множення імовірностей ймовірність цієї події $P(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$. Аналогічно, X = 3, якщо деталі, виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки — придатна. $P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$. Нарешті, X = 4, якщо деталі, виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$. Запишемо закон розподілу:

x_i	1	2	3	4
$p($	0,75	0,1875	0,046875	0,015625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними щойно формулами.

$$MX=1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{1}{64}=\frac{85}{64};\quad MX^2=1\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{16}+9\cdot\frac{3}{64}+16\cdot\frac{1}{64}=\frac{139}{64};$$

$$DX=\frac{139}{64}-\left(\frac{85}{64}\right)^2=\frac{1671}{4096}.$$

Якщо подія A — «із чотирьох заготівок виготовлено одну придатну деталь», то

$$P(A)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{255}{256}.$$

Практичне заняття 26

Тема: Математична статистика. Вибірки, Вибіркові розподіли.

Мета: зясувати предмет і методи математичної статистики, вивчити поняття вибірки і вибіркового розподілу

Метод: словесний , практичний

План

1 Основні поняття

2 Вибірка
3 Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики

Студенти повинні знати:

- означення випадкової події, їх види та правила виконання дій над ними

Студенти повинні уміти:

-знаходити ймовірність випадкових подій та уміти виконавати дії над

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 24-25.

1 Основні поняття

Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту, називають *математичною статистикою*.

Основним змістом математичної статистики є систематизація, обробка і використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Генеральну сукупність -множина Ω однотипних елементів, яким притаманні певні кількісні ознаки (розміри, вага, маса тощо),.

Обсяг генер. сукупн. -кількість усіх елементів генеральної сукупності , позначають символом *N*, значення якого здебільшого невідоме.

2 Вибірка

Вибірка кожна непорожня підмножина A множини Ω ($A \subset \Omega$) випадково вибраних елементів із генеральної сукупності називається.

Кількість усіх елементів вибірки називають її обсягом і позначають символом n. Його значення відоме, причому воно набагато менше за обсяг генеральної сукупності ($n << N$).

Математична статистика розв’язує дві категорії задач:

1) статистичне оцінювання (точкове, інтервальне) параметрів генеральної сукупності;

2) перевірка правдивості статистичних гіпотез про значення параметрів генеральної сукупності або про закон розподілу ознаки генеральної сукупності на підставі обробки результатів вибірки.

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають *варіантою*.

Зростаючий числовий ряд варіант називають *варіаційним*.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають *частотою варіанти* x_i.

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i ,$$

де k — кількість варіант, що різняться числовим значенням;

n — обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її *відносною частотою* і позначають через W_i , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n} .$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1 .$$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X, яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд — це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди, у котрих інтервали є рівними між собою.

3 Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі він має такий вигляд:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k
W_i	W_1	W_2	W_3	...	W_k

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпірична функція $F^*(x)$ та її властивості. Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} ,$$

називається *емпіричною*, або *комулятою*.

Тут n — обсяг вибірки;

n_x — кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x;

$F^*(x)$ — називають ще *функцією нагромадження відносних частот*.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3) $F(x)\big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, а саме: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$, або $(x_i; W_i)$.

У першому випадку ламану лінію називають *полігоном частот*, у другому — *полігоном відносних частот*.

***Числові характеристики*:**

1) *вибіркова середня величина* $\bar{x}_{\text{В}}$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n},$$

називають *вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки*.

Тут x_i — варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i — частота цієї варіанти;

n — обсяг вибірки ($n = \sum n_i$).

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i}{n};$$

2) *відхилення варіант*. Різницю $(x_i - \bar{x}_{\text{В}})n_i$ називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum (x_i - \bar{x}_{\text{В}})n_i = \sum x_i n_i - \sum \bar{x}_{\text{В}} n_i = n \cdot \bar{x}_{\text{В}} - n \cdot \bar{x}_{\text{В}} = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) *мода* (Мо*). *Модою дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди — *двомодальним* і т. д.;

4) *медіана* (Ме*). *Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) *дисперсія.* Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_{\text{В}}$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки — це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_{\text{В}}$, яке обчислюється за формулою

$$D_В = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_В)^2 n_i}{n}$$ або

$$D_В = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_В)^2;$$

6) *середнє квадратичне відхилення вибірки* $\sigma_В$. При обчисленні $D_В$ відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X, тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_В = \sqrt{D_В},$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_В$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X;

7) *розмах* (R). Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_В$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою $x_{\max}$ і найменшою $x_{\min}$ варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається *розмахом*

$$R = x_{\max} - x_{\min};$$

8) *коефіцієнт варіації V.* Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_В$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_В}{\bar{x}_В} 100\%.$$

Приклад. За заданим статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

потрібно:

1) обчислити $\bar{x}_В$, $D_В$, $\sigma_В$;

2) знайти Mo*, Me*;

3) обчислити R, V.

Розв'язання. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, то згідно з формулами (354), (357), (358) дістанемо:

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2,5 \cdot 10 + 4,5 \cdot 20 + 6,5 \cdot 30 + 8,5 \cdot 30 + 10,5 \cdot 10}{100} = 6,7;$$

$$\bar{x}_В = 6,7.$$

Для обчислення $D_В$ визначається

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(2,5)^2 \cdot 10 + (4,5)^2 \cdot 20 + (6,5)^2 \cdot 30 + (8,5)^2 \cdot 30 + (10,5)^2 \cdot 10}{100} = 50,05.$$

Тоді

$$D_В = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_В)^2 = 50,05 - (6,7)^2 = 50,05 - 44,89 = 5,16.$$

$D_В = 5,16.$

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} = \sqrt{5,16} \approx 2,27.$$

$\sigma_В = 2,27.$

Mo* = 6,5; 8,5.

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде двомодальним. Me* = 6,5, оскільки варіанта $x = 6,5$ поділяє варіаційний ряд

2,5; 4,5; **6,5**; 8,5; 10,5 на дві частини: 2,5; 4,5 і 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10,5 - 2,5 = 8.$$

$$V = \frac{\sigma_{\text{В}}}{\bar{x}_{\text{В}}} 100\% = \frac{2,27}{6,7} 100\% = 33,88\%.$$