Міністерство освіти і науки України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
_________Л.РОСЛАВЕЦЬ
_____ ___________2019 р.

Методичне забезпечення лекційного курсу
з дисципліни Вища математика
для студентів II курсу спеціальності

151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Уклав О. КУЗЬМЕНКО

Розглянуто на засіданні циклової комісії
спеціальних механічних та загально-технічних дисциплін

Протокол №__ від ___ _________ 20__ року

Голова циклової комісії_______________ Т.СЕМЕРНЯ

Лекція 1

Тема: Вступ. Комплексні числа та дії над ними

Мета: ввести поняття комплексного числа, формувати навички дій з комплексними числами

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Предмет і метод математики.
1 Історична довідка про розвиток математики.
2 Поняття комплексного числа.
3 Дії з комплексними числами.
4 Модуль та аргумент комплексного числа.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: Обчислювальна техніка

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001, с.3-10.
Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.- С. 78-92.

Теоретичні відомості

1 ПРЕДМЕТ І МЕТОД МАТЕМАТИКИ

Слово „математика" походить від грецького слова „матема",що означає знання. Виникла математика в зв'язку із практичною діяльністю людей. З найдревніших часів люди зустрічались з необхідністю виділення сукупностей об'єктів, ділянок землі, тощо.

В результаті багатовікової практичної діяльності людей, виникли основні абстрактні математичні поняття: число, геометрична фігура, функція, похідна, інтеграл, випадкова величина, імовірність.

За свою історію математика, яка розвивалась у тісному зв'язку з розвитком виробничої діяльності людей, перетворилась в струнку дедуктивну науку, яка представляє собою потужний апарат для вивчення оточуючого нас середовища.

2 ІСТОРИЧНА ДОВІДКА ПРО РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ

Історію розвитку математики можна умовно поділити на чотири періоди.

1 період - 6-5 ст. до н. е. - період зародження математики: арифметики, алгебри та початків геометрії.

2 період - 5 ст. до н. е. - середина 17 ст. - період елементарної математики. Створено десяткову систему числення, знайдено метод розв'язування лінійних рівнянь, почали застосовувати знаки додавання, віднімання, коренів, дужки, знаки степенів, букви для позначення, тощо. (Фалес, Архімед, Піфагор, Евклід, Вієт).

3 період - середина 17 - початок 20 століття - період створення математики змінних величин. Створився ряд нових математичних наук - теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, диференціальна геометрія. (Р.Декарт, ПФерма, Ж.Лагранж, І.Ньютон, ВЛейбніц, К.Якобі, К.Вейєрпггр926асс, МВ.Остроградський, П.Л.Чебишев).

4 період - період сучасної математики - характеризується широким застосуванням математики до задач, що їх висуває природознавство і техніка. (Д.Гільберт, Г.Кантор, П.С.Александров, М.М.Боголюбов, А.М.Колмогоров).

Створення електронних обчислювальних машин значно розширює можливості математики. Завдяки ЕОМ математичні методи застосовуються нині не тільки таких традиційних науках , як механіка, фізика, астрономія, а й в хімії, біології, психології, соціології, економіці, медицині, лінгвістиці та ін.

3 ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

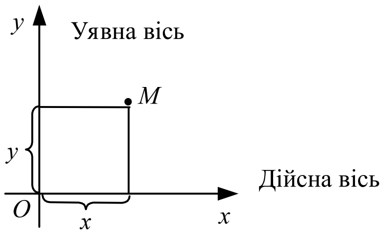
Означення. **Комплексним числом** називається число виду $a + ib$, де $a, b \in R$, $i^2 = -1$.

Дійсне число a називається **дійсною частиною** комплексного числа $a + ib$, а дійсне число b — його **уявною частиною**. Число i називається **уявною одиницею**.

Означення. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються **рівними**, якщо $a = c$ і $b = d$.

Означення. Два комплексні числа виду $a + bi$ та $a - bi$ називаються **спряженими**.

Комплексні числа зображають на числовій площині. Для цього вибирають на площині прямокутну систему координат. Комплексне число $a + ib$ зображається точкою $M(x, y)$, абсциса x якої дорівнює дійсній частині комплексного числа $a (x = a)$, а ордината y дорівнює уявній частині комплексного числа b $(y = b)$.



Приклад

Зобразити на площині комплексні числа:
$3 + 4i$; $-2 + 3i$; $-3 - 2i$; $4 + 0i$; $0 + 2i$.

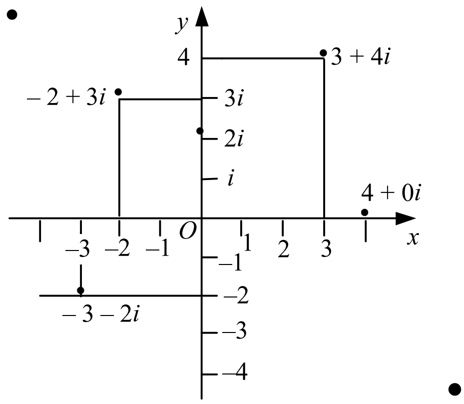


Рис. 1.12

4 ДІЇ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Означення. **Сумою** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$:

$$\boxed{a + bi + (c + di) = a + c + (b + d)i.}$$

Приклади:

1) $(-3 + 5i) + (4 - 8i) = (-3 + 4) + (5 - 8)i = 1 + (-3)i$;

2) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4$.

Означення. **Різницею** двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число $(a - c) + (b - d)i$.

$$\boxed{a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i.}$$

Приклади:

1) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$.

2) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i$.

Означення. **Добуток** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

•$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bidi + bci = ac - bd + (ad + bc)i$•

Зауваження. На практиці не завжди користуються формулою. Можна комплексні числа множити, як двочлени.

Приклади

1) $(1 - 2i)(3 + 2i) = 3 - 6i + 2i - 4i^2 = 7 - 4i$;

2) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Означення. **Часткою** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} i .$$

$$\bullet \boxed{\frac{a + bi}{c + di}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \boxed{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i} \bullet$$

Приклад

$$\frac{7 - 4i}{3 + 2i} = \frac{(7 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{21 - 12i - 14i + 8i^2}{9 + 4} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i.$$

5 МОДУЛЬ ТА АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Означення. **Модулем** комплексного числа $a + bi$ називається вираз $\sqrt{a^2+b^2}$, який позначається r або $|a + bi|$.

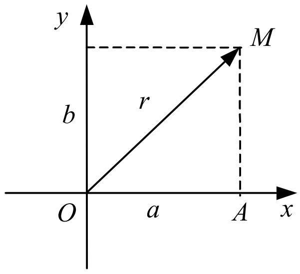


Рис. 1.13

Приклади

$$r = |3+5i| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83;$$
$$r = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41;$$
$$r = |0+7i| = 7.$$

Означення. Кут φ між віссю Ox і відрізком OM, де точка M зображає комплексне число $a + bi$, називається **аргументом** комплексного числа $a + bi$ (рис. 1.13).

Кожне відмінне від нуля комплексне число має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$. Для числа 0 аргумент не визначений.

Аргумент φ комплексного числа *a + bi* визначається формулами:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a \neq 0. \qquad (1)$$

Зауваження. Щоб користуватися цими формулами, потрібно враховувати знаки абсциси та ординати комплексного числа.

Приклад

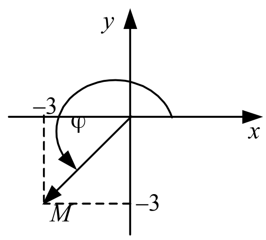
Знайти аргумент комплексного числа $-3 - 3i$.

● За формулою (1) маємо

$\mathrm{tg}\varphi = \frac{-3}{-3} = 1$, або $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 225^\circ$ і т. ін.

Але кут 45° не є аргументом числа $-3-3i$

Правильною є така відповідь: 225°; -135°; 585° і т. д. Цей результат дістаємо, враховуючи, що абсциса та ордината комплексного числа є від'ємними, тобто точка M належить чверті III.



Означення. Значення аргументу, яке належить проміжку $(-\pi; \pi)$, називається **головним**.

Приклад

Для комплексних чисел $-3-3i$; $2i$; $-5i$ головне значення аргументу дорівнює -135°; 90°; -90°.

Зауваження. Аргумент дійсного додатного числа має головне значення 0°; від'ємного числа 180°. Головні значення аргументу спряжених комплексних чисел мають одну й ту саму абсолютну величину, але протилежні знаки. Наприклад, головні значення аргументу спряжених чисел $-3+3i$ та $-3-3i$ дорівнюють 135° і -135°.

Лекція 2

Тема: Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Мета: розширити поняття про комплексні числа, навчити ставити у відповідність комплексному числу точку на площині, виконувати операції над комплексними числами в геометричному вигляді

Метод: словесний , практичний

План

1 Геометрична інтерпретація комплексних чисел
2 Геометричне зображення суми і різниці двох комплексних чисел.
3 Модудь комплексного числа
4 Аргумент комплексного числа

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

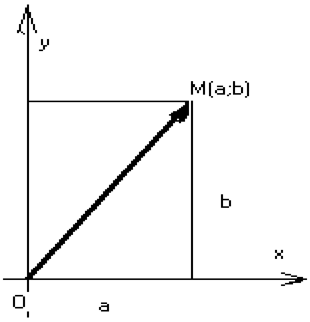
1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 7-10.
2 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 86-92.

Теоретичні відомості

1 Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

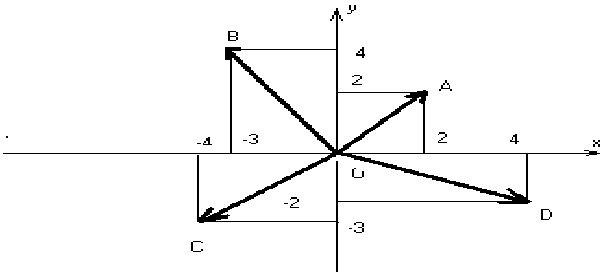
Вивчаючи комплексні числа, можна використовувати геометричну термінологію і геометричні міркування, якщо встановити взаємно однозначну відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини. Цю відповідність можна встановити так. Кожному комплексному числу a + bί поставимо у відповідність точку M(a;b) координатної площини, тобто точку, абсциса якої дорівнює дійсній частині комплексного числа, а ордината – коефіцієнту уявной частини. Кожній точці M(a;b) координатної площини поставимо у відповідність комплексне число

Очевидно, що така відповідність є взаємно однозначною. Вона дає можливість



інтерпретувати комплексні числа як точки деякої площини, на якій вібрано систему координат. Координатну площину називають при цьому комплексною, вісь абсцис – дійсною віссю, бо на ній розміщені точки, що відповідають комплексним числам a + 0í, тобто відповідають дійсним числам. Вісь ординат називають уявною віссю – на ній лежать точки, які відповідають уявним комплексним числам 0+ bí.

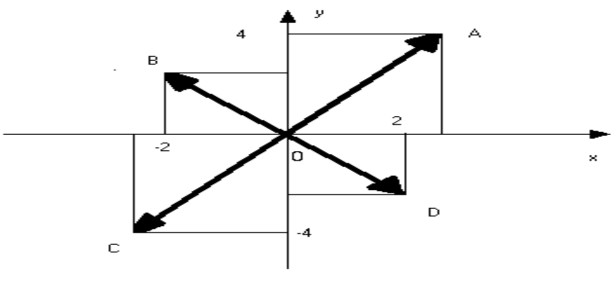
Зручною є також інтерпритація комплексного числа як вектора OM



Поставимо у відповідність кожному комплексному числу вектор з початком у точці O(0;0) і кінцем у точці M(a;b). Ви знаєте, що такий вектор називають радіус – вектором, а його проекції на осі є координатами вектора. Отже, можна сказати, що геометрични зображенням комплексного числа z = a + bí є радіус – вектор з координатами a і b. Відповідність між множиною комплексних чисел, з одного боку, і множиною точок або векторів площини, з іншого, дає змогу комплексні числа називати векторами аьо точками і говорити, наприклад, про вектор a + bí або про точку a + bí.

Вектори OA, OB, OC, OD є відповідними геометричними зображеннями комплексних чисел z_1= 2+2í; z_2= -3+4í; z_3= -4-3í; z_4= 4-2í.

Протилежним комплексним числам відповідають протилежні вектори.



На малюнку 3 зображено дві пари протилежних векторів OA і OC, OB і OD, що відповідають парам протилежних чисел 3+4í та –3-4í; -2+3í та 2-3í.

2 Геометричне зображення суми і різниці двох комплексних чисел.

З геометричної інтерпретації комплексних чисел у вигляді векторів випливає можливість геометричного зображення додавання комплексних чисел. Воно знаходиться до знаходження сум двох векторів за відомим правилом паралелограма.

Нехай дано два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1í$ та $z_2 = a_2 + b_2í$, яким відповідають радіус – вектори OA і OA (малюнок 4). Побудуємо на цих векторах як на сторонах

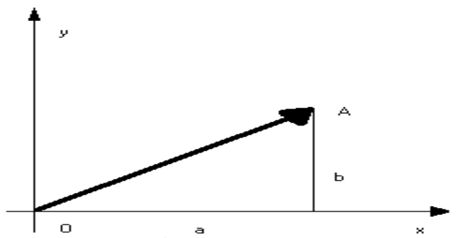
паралелограм. Тоді зображенням суми комплексних чисел z_1 і z_2 буде вектор OB (діагональ паралелограма) справді, при додаванні векторів їх відповідні координати додають. Тому, якщо вектор OA_1 має координати $(a_1;b_1)$, а вектор OA_2 $(a_2;b_2)$, то їх сума – вектор OB – матике координати $(a_1+a_2;b_1+b_2)$. Вектор OB відповідає комплексному числу $(a_1+a_2) + (b_1+b_2)$, яке є сумою чисел z_1 і z_2.

Нехай, наприклад, треба знайти геометричне зображення різниці z_1 - z_2 комплексних чисел z_1 = 2+3í та z_2 = -3+2í. Будуємо вектор OA, що є зображенням числа z_1, і додаємо до нього вектор OB, який зображує число z_2 = -3+2í, протилежне від'ємнику (малюнок 5). Шукану різницю зображують вектором OC, що є сумою векторів OA і OB. Йому відповідає комплексне число 5+í.

3 Модуль комплексного числа.

Запис числа z у вигляді a + bí називається алгебраїчною формою запису комплексного числа. Крім алгебраїчної форми використовують й інші форми запису комплексних чисел – тригонометрична і показникова. Розглянемо тригонометричну форму запису, а для цього введемо поняття про модуль і аргумент комплексного числа.

Побудуємо радіус – вектор OA, що є геометричним образом комплексного



числа

z = a + bí.

Модулем комплексного числа z = a + bí називається значення $\sqrt{a^2 + b^2}$. Число r =$\sqrt{a^2 + b^2}$ перетворюється на нуль тільки за умов a =0, b =0.

Модуль комплексного числа a + bí позначається символом a + bí. Отже, a + bí = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Якщо комплексні числа мають один і той самий модуль, то кінці векторів, які зображують ці числа, лежать на колі з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює їх модулю.

Приклади: знайти модулі даних комплексних чисел.

1) 5+7í = √25+49 = √74;
2) –2-3í = √4+9 = √13;
3) 8+0í=√64 = 8;
4) 5í= 5.

4 Аргумент комплесного числа.

Нехай радіус – вектор OA зображує комплексне число z = a + bí (дивіться малюнок 6). Позначимо α кут, який утворює вектор OA з додатним напрямом осі x. Числове значення кута α, виміряного в радіанах, називається аргументом комплексного числа a + bí. Якщо комплексне число дорівнює нулю, то вектор OA перетворюється в точку (нуль – вектор), і говорити про його напрям немає сенсу. Тому вважають, що число нуль не має аргументу. Кожне відмінне від нуля комплексне число має нескінченну множину значень аргументу, які відрізняються один від одного на ціле число повних обертів, тобто на величину 2πn, де n – довільне ціле число. Значення аргументу, взяте в межах першого кола, тобто від 0 до 2π, називається головним. Головне значення аргументу комплексного числа можна визначити з рівності tg α = b/a. Справді, за знаками a і b можна встановити, в якій четверті міститься кут α, і за величиною tg α, використовуючи таблиці, знайти величину кута α.

Приклади: знайти головне значення аргументу даних комплексних чисел.

1) z = 1+í;

Маємо: tg α = 1. Оскільки a = 1 та b = 1, радіус – вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить I чверті і тому α - гострий кут. Отже, = π/4.

2) z = -2+2√3í;

Маємо: tg α = 2√3/(-2) = -3. Тут a = -2, b = 2√3, тобто радіус – вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить II чверті. Отже, α = π 2/3.

3) z = -1-í;

Маємо: tg α = 1. Радіус – вектор, що відровідає даному комплексному числу, належить III чверті. Отже, α = π 5/4.

4) z = 1-√3í;

Маємо: tg α = -√3. Тут a = 1, b = -√3. Радіус – вектор, що відповідає даному комплексному числу, належить IV чверті. Отже, = π 5/3.

Лекція 3

Тема: Тригонометрична форма комплексного числа

Мета: розширити поняття про комплексні числа, навчитися записувати комплексні числа в тригонометричній формі і виконувати дії над ними

Метод: словесний , практичний

План

1 Тригонометрична форма комплексного числа

2 Множення і ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі

3 Добування кореня з комплексного числа

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 11-13.

2 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 94-98.

Теоретичні відомості

1 Тригонометрична форма комплексного числа

Нехай вектор ОА є геометричним зображенням комплексного числа $z = a + bі$ (дивіться малюнок 7), модуль якого дорівнює r, а аргумент α. У прямокутному трикутнику АОС $a = r \cos \alpha$, $d = r \sin \alpha$. Підставляючи у запис комплексного числа замість a та d їхні значення, виражені через модуль і аргумент, дістанемо :

$$Z = r \cos \alpha + ir \sin \alpha i = r(\cos \alpha + i\sin \alpha).$$

Вираз $r(\cos \alpha + \sin \alpha i)$ називається тригонометричною формою комплексного числа. Будь – яке число $a + bi$, дане в алгебраїчній формі, можна подати в тригонометричній формі. Модуль r знаходимо за формулою $r =\sqrt{a^2 + b^2}$, а кут α визначаємо із залежності $\mathrm{tg}\, \alpha =b\backslash a$, яка випливає з формул $\cos \alpha = a\backslash r$, $\sin \alpha = b\backslash r$.

Приклади:

а) $z = -1-\sqrt{3}i$;

Маємо: $r = \sqrt{(-1)^2+(- \sqrt{3})^2} = 2$; $\mathrm{tg}\, \alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = 4\pi\backslash 3 + \pi n$, $n \in Z$.

Через те, що радіус – вектор, який зображує число $z = a + bi$, розміщений у ІІІ чверті комплексної площини, то за аргумент беремо $\alpha = 4\pi\backslash 3 + \pi n$. Отже, $-1-\sqrt{3}i = 2(\cos 4\pi\backslash 3 + i \operatorname{Sin} 4\pi\backslash 3)$.

б) $z = i$;

Тут $a = 0$, $b = 1$, отже, $r = 1$. Вектор, що зображує число i, утворює з віссю абсцисс кут $\pi\backslash 2$ (поясніть чому). Отже, $i = \cos \pi\backslash 2 + i \sin \pi\backslash 2$.

в) $z = 3$.

Тут $a = 3$, $b = 0$, отже, $r = 3$. $3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$.

Розглянемо приклади переходи від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної.

Приклади:

а) $2(\cos \pi\backslash 3 + í \sin \pi\backslash 3) = 2(1\backslash 2+\sqrt{3}í \backslash 2) = 1 +\sqrt{3}í$;

б) $4(\cos 2\pi\backslash 3 + í \sin 2\pi\backslash 3) = 4(-1\backslash 2+\sqrt{3}í \backslash 2) = -2 + 2\sqrt{3}í$.

2 Множення і ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі

Тригонометрична форма запису комплексних чисел виявляється дуже зручною під час множення і ділення чисел. Нехай $Z_1=r_1(\cos \alpha_1 + í \sin \alpha_1)$, $Z_2=r_2(\cos \alpha_2 + í \sin \alpha_2)$ – два числа, що записані в тригонометричній формі. Тоді

$Z_1 Z_2= r_1r_2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + í \sin \alpha_1\cos \alpha_2 + í \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)$, або $Z_1 Z_2= r_1r_2(\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + í \sin (\alpha_1 + \alpha_2))$. Отже, справедливим є твердження: під час множення комплексних чисел у тригонометричній формі модулі їх перемножуються, а аргументи додаються. Для знаходження частки множимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника:

$Z_1\backslash Z_2=r_1(\cos \alpha_1 + í \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 - í \sin \alpha_2)\backslash\ r_2(\cos \alpha_2 + í \sin \alpha_2)(\cos \alpha_2 - í \sin \alpha_2) = r_1\backslash r_2 x(\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + í \sin (\alpha_1 - \alpha_2))\backslash(\cos^2 \alpha_2 + í \sin {}^2\alpha_2)= r_1(\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + í \sin (\alpha_1 - \alpha_2))\backslash\ r_2$.

Отже, під час ділення комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаюьтся.

Приклади. Виконати множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі.

а) $Z_1=3(\cos 7° + í \sin 7°)$; $Z_2=8(\cos 15° + í \sin 15°)$;

д) Подаємо без доведення правила піднесення до степеня комплексного числа, записаного в тригонометричній формі.

При будь – якому натуральному n

$$(\cos \alpha + í \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + í \sin n\alpha.$$

Це твердження називається формулою Муавра.

Приклади. Виконати дії піднесення до ступеня даного комплексного числа.

$Z=\sqrt{3}-í$. Обчислити Z.

Модуль даного числа дорівнює $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = 2$, аргумент $\alpha = -\pi\backslash 6$, отже модуль числа Z дорівнює 2, аргумент $9\alpha = -9\pi\backslash 6 = -3\pi\backslash 2$. Таким чином,

$(\sqrt{3}-í) = 2 (\cos (-3\pi\backslash 2)+ í \sin(-3\pi\backslash 2)) = 512í$.

3 Добування кореня з комплексного числа

Корінь n – го ступеня з числа $Z=r(\cos \alpha + í \sin \alpha)$ обчислюють за формулою

$$\omega = \sqrt{r}(\cos ((\alpha + 2 \pi к)\backslash n) + í \sin ((\alpha + 2 \pi к)\backslash n)),$$

де к – деяке ціле число (к є Z).

Підставляючи замість к значення 0, 1, 2…n – 1, дістанемо n різних значень кореня. Так, якщо n = 2, к = 2 матимемо $\sin ((\alpha + 4 \pi) = \sin \alpha\backslash 2$ і так далі.

Приклади. Знайти всі значення $\sqrt{1}$

Оскільки 1 = 1(cos 0 + ί sin 0), то

$\sqrt{1}$(cos 0 + ί sin 0) = 1(cos ((0 + 2 πк)\5) + ί sin ((0 + 2 πк)\5), к = 0, 1, 2, 3, 4. Надаючи к послыдовно значень 0, 1, 2, 3, 4, выдповыдно дыстанемо:

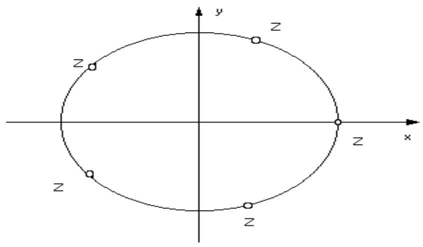
Z_1= 1, якщо к = 0;

Z_2= cos 2π\5 + ί sin 2π\5, якщо к = 1;

Z_3= cos 4π\5 + ί sin 4π\5, якщо к = 2;

Z_4= cos 6π\5 + ί sin 6π\5, якщо к = 3;

Z_5= cos 8π\5 + ί sin 8π\5, якщо к = 4.



Цікавий такий факт. Модулі всіх цих значень $\sqrt{1}$ дорівнюють 1. Отже, точки$_4$, Z_5 лежать на колі радіуса 1 з центром у початку координат. Побудувавши аргументи значень Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 , помітимо, що точки, які зображують числа Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, є вершинами правильного п'ятикутника (малюнок 7).

Взагалі точки, які відповідають значенням кореня n – го ступеня з комплексного числа Z=r(cos α + ί sin α), розміщуються у вершинах правильного n – кутника з центром у точці О.

Лекція 4

Тема: Визначники 2 та 3 порядків та їх властивості.

Мета: Вивчення поняття визначників, їх властивостей та методами обчислення. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1Визначники 2 і 3 порядків та їх властивості.
2Обчислення визначників за правилом трикутника.
3Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

калькулятори

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001, с 3-10.

Теоретичні відомості:

Тема: Визначники 2 та 3 порядків та їх властивості.

1. Визначники 2 і 3 порядків та їх властивості.

Теоретичні відомості

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (2)$$

називається *визначником третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (2) складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – *побічну діагональ.*

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести множником за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. Визначник, що має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

8. Якщо у визначнику деякий (наприклад, *i*-й) рядок є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких усі рядки, крім *i*-го, будуть такі, як у даному визначнику; *i*-й рядок першого визначника складатиметься з перших доданків, *а* *i*-й рядок другого визначника складається з других доданків.

2. Обчислення визначників за правилом трикутника.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за *правилом трикутників* (рис. 1): перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

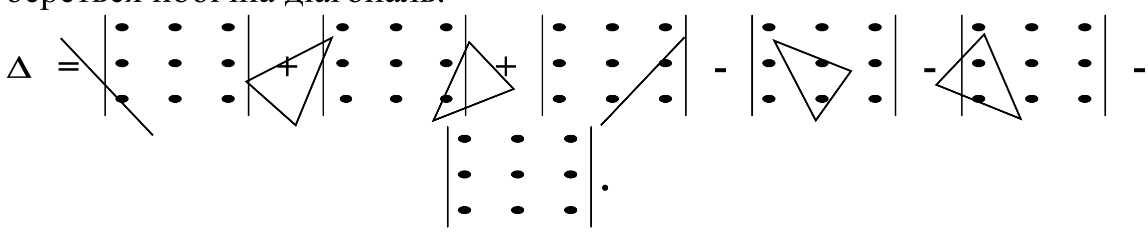


Рис. 1

Визначником квадратної матриці A розміру nЧn називається число

$$D(A) = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{inv(i_1,\dots,j_n)} \cdot a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} \qquad (3)$$

Сума обчислюється за всіма перестановками $(i_1,\dots,i_n)$. Величина $inv(i_1,\dots,i_n)$ це кількість інверсій перестановки $(i_1,\dots,i_n)$, тобто кількість пар (i_k,i_m) таких, що $i_k>i_m$, проте i_k розташоване лівіше від i_m .

3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Існує простий спосіб розкриття визначника третього порядку — так зване **правило Саррюса**. Допишемо до визначника перший і другий стовпці, а далі перемножимо елементи, що розміщені на одній лінії, як показано

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Добуток елементів, які розміщені на лініях, що йдуть згори ліворуч униз праворуч, береться зі знаком «+». Добуток елементів, розміщених на лініях, що йдуть згори праворуч униз ліворуч, береться зі знаком «–».

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання рядка й стовпця, що містять a_{ij}.

Розглянемо визначник третього порядку Δ, заданий формулою (2). Для кожного з дев'яти елементів цього визначника існує свій мінор. Наприклад, мінором елемента a_{12} є визначник $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Його можна дістати з елементів визначника (2), викресливши у ньому перший рядок і другий стовпчик.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. *Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розкладання визначника (2) за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = -10.$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язування.

За правилом Саррюса складемо таблицю

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

і знайдемо значення визначника:

$D_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -11.$

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 .$$

Лекція 5

Тема: Матриці. Дії над матрицями та їх властивості.

Мета: Вивчення основних понять теорії матриць та матричного методу розв'язування системи лінійних рівнянь. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1Основні означення.

2Дії над матрицями та їх властивості.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.- с 13-18, 24-25.

Теоретичні відомості:

Тема: Матриці. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця.

Матриці. Основні дії над матрицями.

Матрицею називається прямокутна таблиця з чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Матриця $\mathbf{A}$ з елементами a_{ij} розміру $m \times n$ має m рядків та n стовпців і позначається так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця містить однакову кількість рядків і стовпців вона називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*.

Матриця, у якої всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якої всього один стовпець, – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – *побічну діагональ.*

Якщо в матриці $\mathbf{A}$ поміняти місцями рядки і стовпчики, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці* $\mathbf{A}$ і позначається $\mathbf{A}^T$.

Квадратна матриця, в якої всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею.

Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця $\boldsymbol{O}$ називається нульовою, якщо всі її елементи є нулями:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} .$$

Якщо $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – матриці одного розміру, то вони вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.

Сумою матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ є матриця $\mathbf{C}$ з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij.}$ Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ на число k є матриця $\mathbf{B}$ з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ розміру $m \times n$ на матрицю $\mathbf{B}$ розміру $n \times k$ є матриця $\mathbf{C}$, розміром $m \times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij} , який стоїть в *i*-му рядку та *j*-му стовпці матриці $\mathbf{C}$, дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці $\mathbf{A}$ на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці $\mathbf{B}$). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків другої матриці $\mathbf{B}$. Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} .$$

Слід відзначити, що AE = EA = A.

Будь-якій квадратній матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником цієї матриці* і позначається символом det A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Прямокутна матриця визначника не має.

Виконуються такі властивості додавання та множення матриць:

$E \cdot A = A \cdot E = A$ (властивість множення на одиничну матрицю);
$O \cdot A = A \cdot O = O$ (властивість множення на нульову матрицю);
$k \cdot O = O \cdot k = O$ $A+O = O+A = A$;
$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$;
$A+B = B+A$ (комутативна властивість додавання);
$A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативна властивість додавання);
$(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$;
$\alpha(AB) =(\alpha A)B$;
$(A+B)C = AC+BC$; $C(A+B) = CA+CB$.

Приклад. Знайти матрицю $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Кількість стовпців матриці $\mathbf{A}_{2\times2}$ дорівнює кількості рядків матриці $\mathbf{B}_{2\times3}$, тому за означенням маємо

$$\mathbf{C}_{2\times3} = \mathbf{A}_{2\times2}\mathbf{B}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1) \\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лекція 6

Тема: Обернена мтриця. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Мета: Вивчення поняття оберненої матриці і матричного способу розв'язування систем рівнянь

Метод: словесний , практичний

План

1 Обернена матриця
2 Матричний метод

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН:

обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 24-25.

Теоретичні відомості:

Обернена матриця

Нехай $\mathbf{A}$ – деяка квадратна матриця n-го порядку.

Матриця $\mathbf{A}^{-1}$ називається *оберненою* до матриці $\mathbf{A}$, якщо виконується умова

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ *й невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. *Для існування оберненої матриці* $\mathbf{A}^{-1}$ *необхідно і достатньо, щоб матриця* $\mathbf{A}$ *була невиродженою*.

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці $\mathbf{A}$.

Приклад. Знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці $\mathbf{A}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Матриця $\mathbf{A}$ невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою. Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Складемо обернену матрицю

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Лекція 7

Тема: Види рівнянь прямої на площині. Види рівнянь площин

Мета: Вивчення рівнянь прямої на площині, рівнянь площин, кутів між прямими, площинами. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховувати старанність, відповідальність.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Види рівнянь прямої на площині.
2 Кут між прямими. Умова паралельності та перпендикулярності прямих.
3 Відстань від точки до прямої.

4 Види рівнянь площин.

5 Кут між площинами. Умова паралельності та перпендикулярності площин.

6 Відстань від точки до площини.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: креслярський інструмент

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С.119-144.

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.- С. 76-88.

Теоретичні відомості:

ТЕМА: Види рівнянь прямої на площині. Види рівнянь площин

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Нехай на площині задано пряму у прямокутній системі координат x, y. Кут φ між віссю Ox і цією прямою називається **кутом нахилу прямої** до осі. Тангенс кута нахилу $k = \operatorname{tg}\varphi$ називається **кутовим коефіцієнтом** розглядуваної прямої. Якщо ця пряма перетинає вісь Oy у точці B з координатами $(0, b)$, то число b називається **початковою ординатою**. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на прямій (рис. 1).

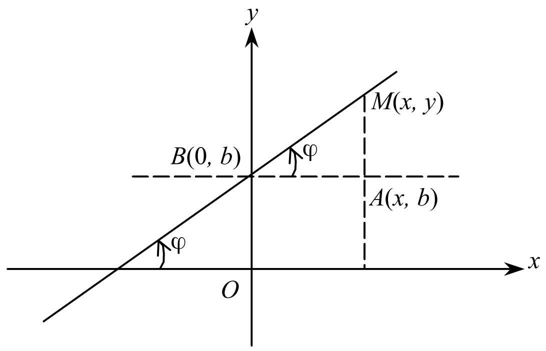


Рис. 1

З прямокутного трикутника MAB знаходимо рівняння прямої

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

яке можна подати у вигляді

$$\boxed{y = kx + b, \quad \text{де } k = \operatorname{tg}\varphi.} \qquad (1)$$

Якщо розглядувана пряма паралельна осі Oy, то $\varphi = 0{,}5\pi$ і $\operatorname{tg}\varphi$ не існує. При цьому пряма має рівняння виду $x = a$ (рис. 2).

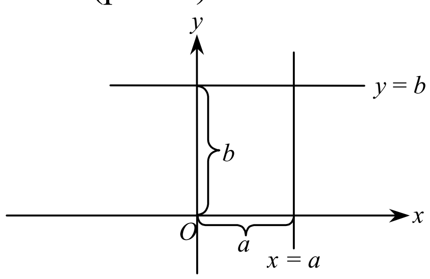


Рис. 2

Координати x, y будь-якої точки $M(x, y)$, що належить прямій, задовольняють рівняння (1). Якщо пряма (1) проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то справджується рівність

$$y_1 = kx_1 + b,$$

Віднімаючи почленно цю рівність від рівності (1), дістаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1).} \qquad (2)$$

Зі зміною кутового коефіцієнта k в рівнянні (2) утворюються різні прямі, що проходять через точку $M_1(x_1, y_1)$. Рівняння (2) називається **рівнянням пучка (в'язки) прямих** (рис. 3).

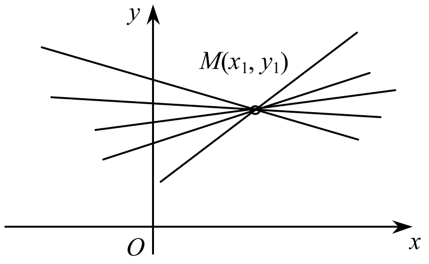


Рис. 3

Нехай дано дві різні точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, де $x_2 \neq x_1$. З рівняння (2) випливає вираз для кутового коефіцієнта прямої, що проходить через точки M_1, M_2:

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}.} \qquad (3)$$

Підставляючи в (3) рівняння (2), знаходимо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (4)$$

Приклад

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(4, 1)$, $M_2(2, 3)$.

• Згідно з (4) маємо:

$$\frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x - 4}{2 - 4}, \quad y = -x + 5, \quad \text{tg}\varphi = -1, \quad \varphi = 135^\circ.$$

Ця пряма утворює кут 135° з віссю Ox. •

Якщо задано вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.}$$

Вектор $\mathbf{s}$ називається **напрямним вектором прямої**.

Щоб побудувати графік прямої, достатньо знати дві її різні точки і через них провести пряму. Якщо пряма перетинає осі координат у точках $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то її можна записати рівнянням

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,} \qquad (5)$$

яке називається **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

Приклад

Запишемо рівняння прямої

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

у вигляді (5).

• Значенню $y_1 = 0$ відповідає $x_1 = 3$. При $x_2 = 0$ знаходимо $y_2 = 2$. Отже, шукане рівняння прямої подається у вигляді

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

Пряма перетинає вісь x у точці з координатою $x = 3$, а вісь y — у точці з координатою $y = 2$. •

КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

Розглянемо дві прямі, які задано рівняннями

$$y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2. \qquad (1)$$

Якщо прямі паралельні, то вони мають однакові кути нахилу: $k_1=k_2$. (2)

Дві прямі збігаються, якщо $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

Якщо прямі взаємно перпендикулярні, то $\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{2}$ і

$$k_2=\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{tg}\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\varphi_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}=-\frac{1}{k_1}.$$

Рівність

$$k_2=-\frac{1}{k_1}$$

є умовою перпендикулярності двох прямих виду (1). (3)

Якщо прямі не паралельні, то вони перетинаються в точці $M(x, y)$, координати якої є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1, \\ y=k_2x+b_2. \end{cases}$$

Нехай θ — кут між цими прямими (рис. 4).

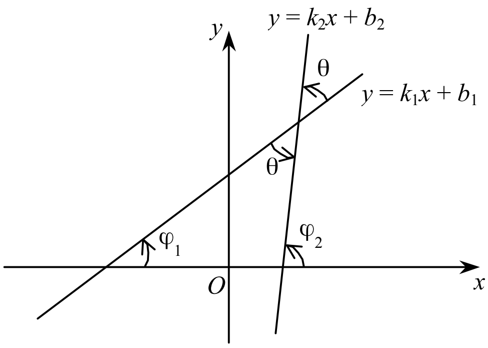


Рис. 4

Згідно з рис. 3.25 маємо: $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$ (зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним). Отже,

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\ \operatorname{tg}\varphi_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}.$$

Формулу $\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$ застосовують для знаходження кута між двома прямими, заданими рівняннями виду (1). (4)

Приклад

У трикутнику з вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(2, 4)$ знайти кут α при вершині A, а також рівняння висоти CD і медіани BM (рис. 5).

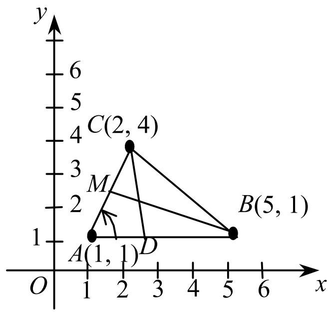


Рис. 5

Скориставшись (3), знайдемо кутові коефіцієнти прямих AB, AC:

$$k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4},\ k_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-1}{2-1} = 3;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{3 - \frac{1}{4}}{1 + 3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{11}{7},\quad \boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\frac{11}{7}.}$$

Пряма CD перпендикулярна до прямої AB. Її кутовий коефіцієнт $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$, а відповідне рівняння

$$y - 4 = -4(x - 2).$$

Точка M поділяє відрізок AC пополам. Отже,

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Через точки $B(5, 2)$, $M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ проводимо пряму m і згідно з (4) дістаємо:

$$\frac{y-2}{\frac{5}{2}-2} = \frac{x-5}{\frac{3}{2}-5},\ \text{або}\ \boxed{y = -\frac{1}{7}x + \frac{19}{7}}. \bullet$$

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Розглянемо на площині прямокутну систему координат x, y і знайдемо рівняння прямої, коли відомий вектор її нормалі $\mathbf{n} = \{A, B\}$ і задано точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої прямої (рис. 6).

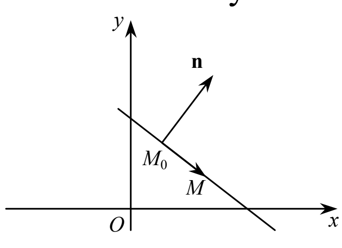


Рис. 6

За умовою вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n} = \{A, B\}$. Тому їх скалярний добуток $\mathbf{n}\mathbf{M}_0\mathbf{M} = 0$. Звідси маємо рівняння

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,} \qquad (1)$$

або

$$\boxed{\begin{gathered} Ax + By + C = 0, \\ C = -Ax_0 - By_0. \end{gathered}} \qquad (2)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої**.

На відміну від рівняння виду (1) змінні x, y входять до рівняння (2) рівноправно. Рівняння (1) завжди можна подати у вигляді (2).

Рівняння прямої (2) можна записати у вигляді ($y = kx + b$) лише за умови $B \neq 0$.

Коефіцієнти A, B при x, y у загальному рівнянні прямої є проекціями на координатні осі вектора її нормалі **n**.

Справджується теорема.

Теорема 1. **Будь-яка пряма на площині може бути задана лінійним рівнянням виду (2). Кожне лінійне рівняння виду (2), де** $A^2 + B^2 > 0$, **визначає деяку пряму.**

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше при виведенні рівняння (1). Доведемо друге твердження. Візьмемо довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 0.$$

Оскільки коефіцієнти при x, y не перетворюються одночасно на нуль, завжди знайдуться значення $x = x_0$, $y = y_0$, при яких виконується рівність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Віднімаючи ці рівняння почленно, дістаємо рівність

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \qquad (3)$$

За допомогою векторів

$$\mathbf{n} = \{A, B\},\quad \mathbf{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0\}$$

рівність (3) можна записати у вигляді $\mathbf{n}\mathbf{M_0M} = 0$.

Як бачимо з рис. 3.27, вектор $\mathbf{M_0M}$ тоді і тільки тоді буде перпендикулярним до ненульового вектора $\mathbf{n}$, коли точка $M(x, y)$ лежить на прямій, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до цього вектора. Звідси випливає рівняння (1), що визначає деяку пряму. Отже, теорему доведено. ◆

Нехай x, y — координати довільної точки на площині. Пряма (2) поділяє всю площину на дві півплощини. В одній півплощині виконується нерівність $Ax + By + C > 0$, а в іншій — нерівність $Ax + By + C < 0$. На самій прямій маємо: $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо частинні випадки рівняння (2):

якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі x; якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі y; якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат; якщо $A = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю x; якщо $B = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю y.

Нагадаємо, що пряма проходить перпендикулярно до вектора $\mathbf{n} = \{A, B\}$.

КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Нехай дано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій і вектор $\mathbf{s} = \{l, m, n\}$, паралельний цій прямій. Складемо рівняння прямої. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на прямій. Вектор $\mathbf{M_0M}$ паралельний вектору $\mathbf{s}$, який називається **напрямним вектором прямої**.

За умовою паралельності дістанемо рівняння

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}, \qquad (1)$$

яке називається **канонічним рівнянням прямої**.

Пряму можна визначити як результат перетину будь-яких двох площин із наведених далі трьох:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m};\quad \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n};\quad \frac{z-z_0}{n}=\frac{x-x_0}{l}.$$

Останні рівняння є рівняннями **проекцій прямої** відповідно на координатні площини

$$Oxy,\ Oyz,\ Ozx.$$

Якщо дано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на прямій, то за напрямний вектор $\mathbf{s}$ можна взяти $\mathbf{s}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$. Тоді рівняння прямої набере вигляду

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.} \qquad (2)$$

Приклад Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1, 2, 3)$ і $M_2(3, 5, 7)$.

• З рівняння (2) маємо:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}\ \bullet$$

Якщо відомі канонічні рівняння (1), то з них можна вивести **параметричні рівняння прямої**. Нехай t — коефіцієнт пропорційності векторів $\mathbf{M_0M}$ і $\mathbf{s}$, тобто $\mathbf{M_0M}=t\mathbf{s}$.

З рівнянь

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

маємо рівняння

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+lt\\ y&=y_0+mt\\ z&=z_0+nt\end{aligned}\right\},\qquad (3)$$

які називаються **параметричними рівняннями прямої**.

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, точка $M(x, y, z)$, де x, y, z визначаються рівнянням (3), пробігає всю пряму.

Скориставшись позначеннями

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},\ \mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k},\ \mathbf{s}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k},$$

рівняння прямої можна записати у *векторній формі*

$$\boxed{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{s}=0.}$$

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дві прямі задано їх загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2&=0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Точку перетину $M(x, y)$ цих прямих знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь (1), оскільки координати x, y точки M задовольняють одночасно обидва ці рівняння.

Кут θ між даними прямими дорівнює куту між їх нормалями $\mathbf{n}_1=\{A_1,\ B_1\}$, $\mathbf{n}_2=\{A_2,\ B_2\}$ (7).

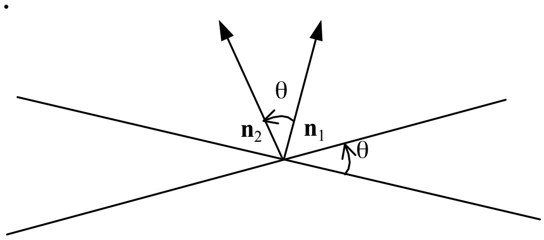


Рис. 7

Отже, маємо такі залежності:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \text{ — умова паралельності прямих.}} \qquad (2)$$

Якщо прямі збігаються, то їх коефіцієнти пропорційні:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.}$$

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0 \text{ — умова перпендикулярності прямих.}} \qquad (3)$$

Скориставшись формулою скалярного добутку векторів, знайдемо кут θ:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.} \qquad (4)$$

Розглянемо спосіб побудови прямих, що проходять через точку перетину двох даних прямих.

Теорема 2. **Якщо прямі (1) не паралельні, то рівняння**

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \mathbf{(5)}$$

визначає пучок прямих, які проходять через точку перетину прямих (1). Вибором λ можна дістати будь-яку пряму, що проходить через точку перетину прямих (1), крім другої прямої.

Доведення. При кожному значенні λ рівняння (5), що є лінійним, визначає деяку пряму. Припустимо, що коефіцієнти при x, y перетворюються на нуль:

$$A_1+\lambda A_2=0;$$
$$B_1+\lambda B_2=0.$$

Тоді виконується рівність

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{або} \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

а це означає, що прямі (1) паралельні.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ є точкою перетину прямих (1):

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

Звідси випливає, що

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0,$$

тобто пряма (5) проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Візьмемо тепер довільну точку площини $M_1(x_1, y_1)$ і виберемо λ так, щоб пряма (5) проходила через точку M_1. Для цього має виконуватися рівність

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0,$$

з якої завжди можна визначити λ за умови

$$A_2x_1+B_2y_1+C_2\neq 0.$$

Іншими словами, точка M_1 не повинна лежати на другій прямій (1). Отже, і справді вибором параметра λ можна дістати будь-яку пряму, що проходить через точку перетину прямих (1), за винятком другої прямої (1).

Теорему доведено. ◆

Приклад

Маємо рівняння сторін трикутника:

$$x-2y+2=0\,(AB);$$

$$2x - y - 1 = 0 \ (AC);$$
$$x + y - 5 = 0 \ (BC).$$

Знайдемо рівняння його висоти, проведеної з вершини C.

● Складемо рівняння пучка променів, які проходять через вершину C:

$$2x - y - 1 + \lambda(x + y - 5) = 0.$$

Далі за умовою (3) перпендикулярності прямих до AB маємо:

$$(2 + \lambda)\cdot 1 + (-1 + \lambda)\,(-2) = 0.$$

Звідси знаходимо значення $\lambda = 4$ і рівняння висоти $2x + y - 7 = 0$. •

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Дано загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

і точку $M_1(x_1, y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої (1). Візьмемо точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій.

Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$ на вектор нормалі $\mathbf{n} = \{A, B\}$ (рис. 8).

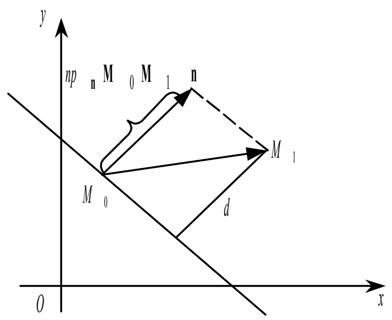


Рис. 8

Записуємо аналітичний вираз для шуканої відстані:

$$d = \left|np_{\mathbf{n}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right| = \frac{\left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\left|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо:

$$\boxed{d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \qquad (2)$$

Приклад Обчислити відстань d від точки $M_1(5, 3)$ до прямої $3x + 4y + 3 = 0$.

• За формулою (2) знаходимо

$$d = \frac{\left|3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 3\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6. \quad \bullet$$

Нехай маємо загальні рівняння двох прямих, що перетинаються:

$$\begin{aligned} &A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ &A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Якщо точка $M(x, y)$ лежить на бісектрисі кутів, утворених прямими (4), то вона однаково віддалена від цих прямих, тобто виконується рівність:

$$\frac{\left|A_1x + B_1y + C_1\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{\left|A_2x + B_2y + C\right|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (5)$$

Приклад Знайти рівняння бісектриси AD трикутника з вершинами $A(1, 1)$, $B(6, 3)$, $C(2, 5)$ (рис. 9).

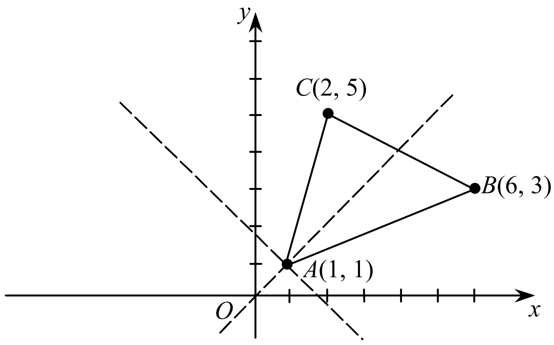


Рис. 9

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\pm\frac{4x-y-3}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{29}}-\frac{4x-y-3}{\sqrt{17}}=0,$$

або

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{29}}+\frac{4x-y-3}{\sqrt{17}}=0. \qquad (7)$$

Ці прямі на рис. 3.31 зображено пунктиром. Вони взаємно перпендикулярні. Щоб знайти бісектрису трикутника ABC, підставимо координати точок $B(6, 3)$, $C(2, 5)$ у рівняння (6) і (7). Оскільки точки B, C лежать по різні боки від шуканої бісектриси, то в результаті підставляння координат точок $B(6, 3)$, $C(2, 5)$ у зазначені рівняння дістанемо числа різних знаків.

Справді, для рівняння (6) маємо:

$$\frac{2\cdot 6-5\cdot 3+3}{\sqrt{29}}-\frac{4\cdot 6-31-3}{\sqrt{17}}<0,\ \frac{2\cdot 2-5\cdot 5+3}{\sqrt{29}}-\frac{4\cdot 2-5\cdot 1-3}{\sqrt{17}}<0$$ (числа однакових знаків);

для рівняння (7):

$$\frac{2\cdot 6-5\cdot 3+3}{\sqrt{29}}+\frac{4\cdot 6-3\cdot 1-3}{\sqrt{17}}>0,\ \frac{2\cdot 2-5\cdot 5+3}{\sqrt{29}}+\frac{4\cdot 2-5\cdot 1-3}{\sqrt{17}}<0$$ (числа різних знаків).

Отже, рівняння (7) визначає шукану бісектрису трикутника ABC. •

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Виведемо рівняння площини у тривимірному просторі, узявши точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій площині і вектор $\mathbf{n}=\{A, B, C\}$, перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на площині. Ця точка належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\mathbf{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}$ (рис. 10).

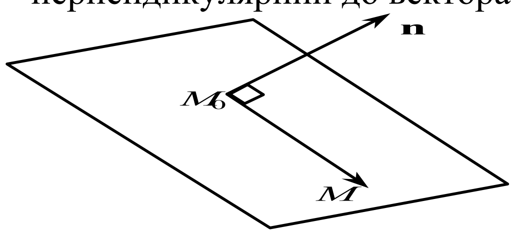


Рис. 10

Умова перпендикулярності вектора

$$\mathbf{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$$

до вектора $\mathbf{n}$ подається у вигляді

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (1)$$

Дістали рівняння площини, що проходить через задану точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ перпендикулярно до заданого вектора $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Якщо позначимо сталу величину

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0, \qquad (2)$$

то рівняння (1) набере вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням площини**.

Рівняння (3) є лінійним відносно координат x, y, z.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Якщо одна з координат x, y, z не входить до рівняння поверхні $f(x, y, z) = 0$, то зі зміною цієї координати вид поверхні не змінюється. Така поверхня буде циліндричною із твірною, що паралельна осі, яка відповідає зазначеній координаті.

Дамо інтерпретацію загального рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

в разі, якщо один або кілька його коефіцієнтів перетворюються на нуль.

1. $A = 0$ — площина паралельна осі x.
2. $B = 0$ — площина паралельна осі y.
3. $C = 0$ — площина паралельна осі z.
4. $D = 0$ — площина проходить через початок координат.
5. $A = 0$, $B = 0$ — площина перпендикулярна до осі z.
6. $A = 0$, $C = 0$ — площина перпендикулярна до осі y.
7. $B = 0$, $C = 0$ — площина перпендикулярна до осі x.
8. $A = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь x.
9. $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь y.
10. $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь z.
11. $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, y.
12. $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, z.
13. $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі y, z.

У загальному випадку, коли жодний із коефіцієнтів рівняння не перетворюється на нуль, рівняння площини можна звести до вигляду

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \qquad (1)$$

Площина, що визначається рівнянням (1), перетинає осі координат у точках $x = a$, $y = b$, $z = c$. Тому рівняння (1) називається **рівнянням площини у відрізках на осях.**

Приклад

Зведемо рівняння площини

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

до вигляду (1). Для цього поділимо обидві його частини на 6:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1.$$

Отже, площина перетинає осі координат у точках $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$. •

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ТОЧКИ

Нехай дано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Знайдемо рівняння площини, яка проходить через ці три точки. Записавши рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$Ax_k + By_k + Cz_k + D = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

складемо систему:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y) + C(z_2 - z_1) = 0;$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

Оскільки ця однорідна система рівнянь має ненульовий розв'язок A, B, C, то її визначник дорівнює нулю:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \qquad (1)$$

1. Рівняння (1) є рівнянням **площини, що проходить через три точки.**

◆ Справді, рівняння (1) є лінійним і, відповідно, визначає деяку площину. Точки $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ лежать на цій площині, оскільки при підставлянні $x = x_k, y = y_k, z = z_k$ $(k = 1, 2, 3)$ у визначник (1) дістанемо визначник з нульовим рядком або двома однаковими рядками.

Приклад Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, 4)$, $M_3(4, 3, 1)$.

• Рівняння (1) набирає вигляду:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 1 & 4 - 1 \\ 4 - 1 & 3 - 1 & 1 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння

$$6x - 9y + 4z - 1 = 0. \ \bullet$$

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ

Дано площину

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ поза нею. Знайдемо відстань від точки M_1 до площини. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на площині. Тоді відстань d від точки M_1 до площини дорівнює модулю проекції вектора $\mathbf{M_0M_1}$, на нормаль до площини (рис. 11).

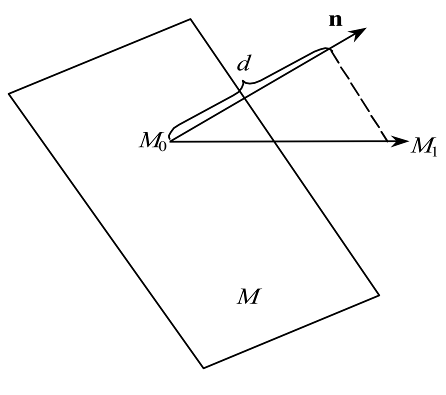


Рис. 11

Отже,

$$d = \frac{\left|\mathbf{n} \cdot M_0M_1\right|}{\left|\mathbf{n}\right|} = \frac{\left|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки

$$-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D,$$

то

$$\boxed{d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \qquad (1)$$

Приклад Знайдемо відстань d від точки $M_1(1,\ 2,\ 3)$ до площини, заданої рівнянням $2x - y + 2z + 3 = 0$.

• Згідно з (1) маємо:

$$d = \frac{\left|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3. \quad \bullet$$

Рівняння площини, записане у вигляді

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,}$$

де знак перед радикалом протилежний знаку D, називається **нормальним рівнянням площини**. Якщо $D = 0$, то вибір знака неістотний.

Щоб знайти відстань від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до площини, слід підставити координати цієї точки в нормальне рівняння площини і знайти модуль здобутої величини.

Величина

$$f = \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

називається **відхиленням точки M(x, y, z) від площини**.

Модуль відхилення дорівнює відстані від точки $M(x,\ y,\ z)$ до площини. Якщо $f < 0$, то точка $M(x,\ y,\ z)$ і початок координат лежать по один бік від розглядуваної площини; якщо $f > 0$, — по різні боки; якщо $f = 0$, то М лежить на цій площині.

Коли маємо дві площини, які перетинаються й подаються рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то бісектральні площини визначаються рівнянням

$$\boxed{\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \qquad (2)$$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Нехай дано дві площини, які визначаються загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Розглянемо вектори нормалей до кожної з площин:

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},\quad \mathbf{n}_1 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Кут θ **між площинами визначається кутом θ** між векторами $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$. Отже, справджується рівність

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (1)$$

Умова перпендикулярності площин така:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (2)$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3)$$

Дві площини збігаються**, якщо виконується рівність**

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (4)$$

У разі виконання умови (4) рівняння однієї площини можна дістати з рівняння іншої площини множенням на сталий множник.

Нехай дано три площини

$$A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \qquad (5)$$

Вони перетинаються в одній точці у тому і тільки тому разі, коли визначник

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо $\Delta = 0$, то площини можуть мати спільну пряму, коли система рівнянь (5) має нескінченну множину розв’язків, або не мати жодної спільної точки, коли система (5) не має розв’язків.

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

1. Щоб знайти відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої

$$\frac{x - x_1}{l}=\frac{y - y_1}{m}=\frac{z - z_1}{n},$$

яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, можна через точку M_0 провести площину, перпендикулярну до прямої, знайти точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої та площини і обчислити відстань d між точками M_0, M_2 (рис. 12).

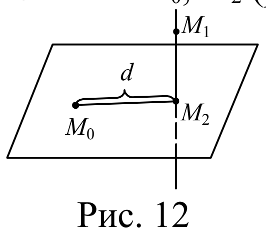


Рис. 12

Приклад

Знайдемо відстань від точки $M_0(1, 2, –1)$ до прямої

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

• Проведемо через точку M_0 площину, перпендикулярну до прямої

$$2(x-1)+1\cdot(y-2)+(-1)(z+1)=0.$$

Складемо параметричне рівняння прямої

$$x=1+2t,\ y=-1+t,\ z=2-t$$

і знайдемо точку перетину прямої та площини:

$$t=1, x_2=3, y_2=0, z_2=1.$$

Отже, $d=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{3}.$

Приклад

Обчислимо відстань від точки $M_0(1, 2, –1)$ до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

• За формулою (1) дістаємо:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3}. \bullet$$

Лекція 8

Тема: Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола

Мета: Вивчення понять про криві другого порядку, їх графіки, рівняння. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховувати старанність, відповідальність.

Методи: Словесний, практичний, наочний

План:

1 Поняття лінії другого порядку.
2 Коло.
3 Еліпс.
4 Гіпербола.
5 Парабола.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: креслярський інструмент

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С.145-170.

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.- С. 97-114.

Теоретичні відомості:

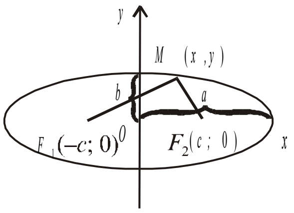
Тема: Криві другого порядку

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$ (1)

Рівняння (1) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс. *Означення*. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.



На рис. зображено F_1 $(–c, 0)$, F_2 $(c, 0)$ — фокуси еліпса, M (x, y) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a,$ причому $2c < < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 – c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2). Якщо $x = 0$, $y = \pm\ b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, – b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm\ a$ і відповідно $(a, 0)$; $(– a; 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.20) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 2.16 зображено еліпс.

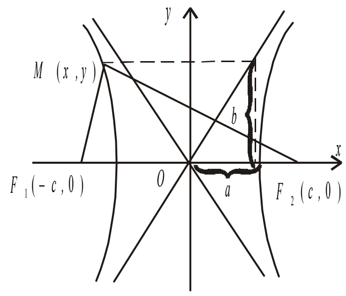
Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. з якого бачимо, що точки F_1 $(– c, 0)$ і F_2 $(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $||MF_1| - |MF_2|| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 – a^2.$$



Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь *Oy*. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю *Ox*. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a} x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей *Ox* і *Oy*, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 2.17.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі *Ox*.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі *Oy* і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі *Oy* і лежать між вітками гіперболи.

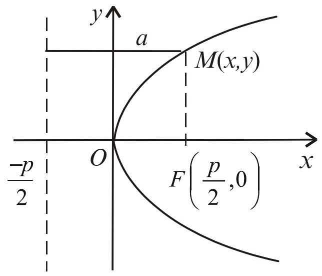
Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: **якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ сталe й дорівнює ексцентриситету, тобто** $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола*, *якщо* $\varepsilon > 1$.

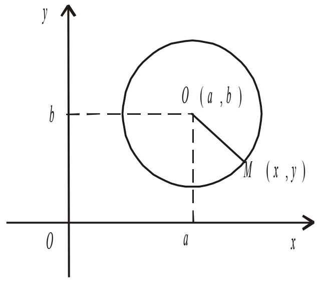
Парабола. *Означення*. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

За означенням $r = d$, отже :



$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2},$$ або $y^2 = 2px$

— канонічне рівняння параболи, коли ε = 1. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 2.18.



Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* .

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2.21)$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Лекція 9

Тема: Функція. Основні елементарні функції

Мета: ознайомити студентів із поняттям функфії. Розглянути види функцій та їх властивості. Розвиток логічного мислення, пам'яті, уваги. Виховувати працелюбність, прививати бажання мати якісні глибокі знання, культуру мовного спілкування в ході бесіди

Методи: словесний, наочний, практичний

План:

1 Поняття функції.

2 Властивості функцій.

3 Види функцій
4 Границя функції

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Таблиця похідних, олівець

Література:

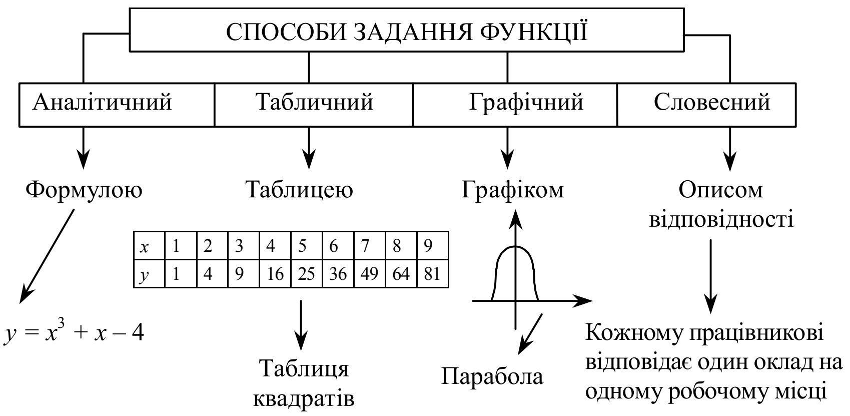
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.-С.191-209.
Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С. 205-210.

Означення. Відповідність, при якій кожному елементу x множини X відповідає єдиний елемент y множини Y, називається функцією.

Позначення: $\boxed{f : x \to y \text{ або } y = f(x)}$.

Множина X називається областю визначення функції, множина Y — областю значень функції. Іноді областю визначення називають множину природного існування функції, тобто множину чисел, при яких функція має сенс.

Отже, поняття функції означується за допомогою трьох понять: «*область визначення*», «*область значень*» і *закономірність*, згідно з якою кожному елементу з множини X відповідає єдине значення з множини Y.



1.7.2. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

Означення.

Функція $y = f(x)$ називається
- монотонно зростаючою;
- строго монотонно зростаючою;
- монотонно спадною;
- строго монотонно спадною;

якщо для кожної пари $x_1, x_2 \in X \quad (x_1 < x_2)$

виконується нерівність	$f(x_1) \le f(x_2)$;
	$f(x_1) < f(x_2)$;
	$f(x_1) \ge f(x_2)$;
	$f(x_1) > f(x_2)$.

Означення.

Функція $y = f(x)$ називається	парною;
	непарною;
	загального виду (ні парна, ні непарна)
якщо для кожного x із X	$f(-x) = f(x)$;
	$f(-x) = -f(x)$;
	не виконується жодна з попередніх властивостей.

Приклад

1. *Парність* (рис. 1.28).

Осьова симетрія

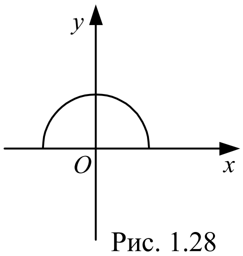


Рис. 1.28

2. *Непарність* (рис. 1.29).

Симетрія відносно точки (наприклад, точки O)

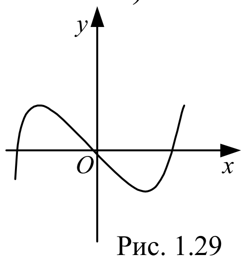


Рис. 1.29

3. *Функція загального виду: ні парна, ні непарна* (рис. 1.30).

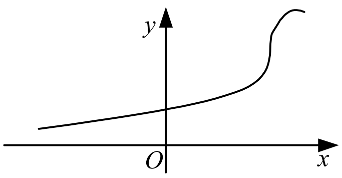


Рис. 1.30

Означення. Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує відмінне від нуля число T, таке що для всіх значень x з області визначення X виконується рівність:

$$f(x+T) = f(x).$$

Число T називається періодом функції.

Приклад

Ілюстрація періодичності (рис. 1.31).

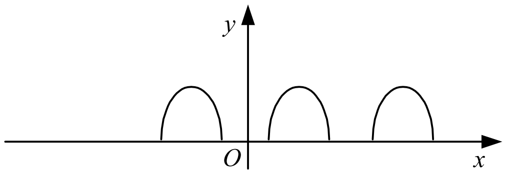


Рис. 1.31

1.7.3. ФУНКЦІЯ, ОБЕРНЕНА ДО ДАНОЇ

Розглянемо взаємно однозначну функцію $y = f(x)$. Це означає, що кожному y із множини Y також відповідає одне і тільки одне значення x із X (рис. 1.32).

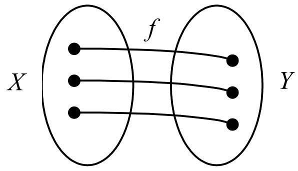


Рис. 1.32

Означення. Функцією, оберненою до функції $y = f(x)$ $(x \in X,$ $y \in Y)$, називається відповідність між множинами Y та X, при якій кожному елементу з Y відповідає єдине значення з X.

Позначення. $\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\ Y \to X; \\ x = f^{-1}(y). \end{array}}$

Якщо в рівності $x = f^{-1}(y)$ y замінити на x, а x виразити через y, дістанемо функцію $y = f^{-1}(x)$. Цю функцію можна також називати оберненою до утвореної. Функції $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ називаються взаємно оберненими.

ПОНЯТТЯ СКЛАДНОЇ (СКЛАДЕНОЇ) ФУНКЦІЇ

Нехай маємо:

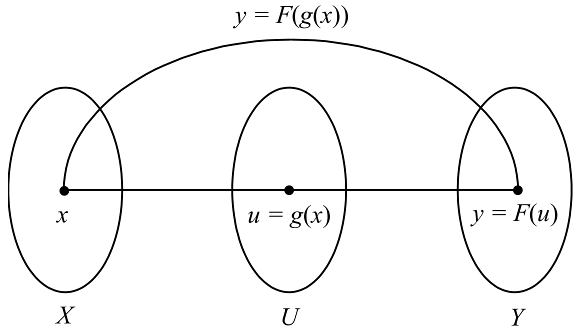


Рис. 1.35

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = g(x)$ є, у свою чергу, деякою функцією, називається складною (складеною) функцією, або суперпозицією (композицією) двох функцій.

Позначення. $\boxed{F = f \circ g = f(g(x)).}$

Приклади

1) $y = \sin^3 x$ — це композиція двох функцій: $y = F(u) = u^3$ і $u = \sin x$;
2) $y = \sin x^3$ — це композиція двох функцій: $y = F(u) = \sin u$ і $u = x^3$.

Лекція 10

Тема: Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання

Мета: ознайомити студентів із задачами, які приводять до поняття похідної; вивчити поняття похідної, вияснити її механічний та геометричний зміст. Вивчити правила диференціювання та таблицю похідних. Розвиток логічного мислення, пам’яті, уваги. Виховувати працелюбність, прививати бажання мати якісні глибокі знання, культуру мовного спілкування в ході бесіди

Методи: словесний, наочний, практичний

План:

1 Поняття похідної функції.
2 Геометричний зміст похідної функції.
3 Механічний зміст похідної функції.
4 Правила диференціювання.
5 Таблиця похідних.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Таблиця похідних, олівець

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.-С.191-209.
Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С. 205-210.

Теоретичні відомості

Тема: Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання

Поняття похідної — фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні, значення електричного струму та ін.) приводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної. Отже, наша найближча мета — познайомитися з поняттям похідної, навчитися знаходити похідні елементарних функцій та застосовувати поняття похідної до дослідження функцій, вивчення деяких фізичних явищ, до вивчення геометричних понять.

Задачі що призводять до поняття похідної:

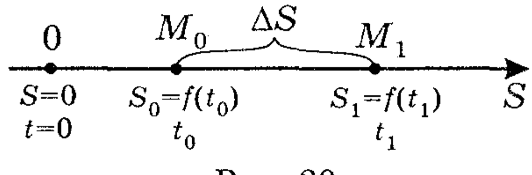


Рис. 20

1. Нехай матеріальна точка M рухається прямолінійно по закону $s = f(t)$ (рис. 20).

В момент часу t_0 вона зайняла положення M_0 і пройшла шлях $S_0 = f(t_0)$. Знайдемо швидкість точки в момент часу t_0.

Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу Δt, починаючи з моменту t_0, точка перемістилася на відстань Δs і зайняла положення M_1. Тоді

$t_1 = t_0 + \Delta t$, $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$.

За проміжок часу $\Delta í$ матеріальна точка проходить шлях

$\Delta x = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Середня швидкість υ руху на проміжку M_0M_1 дорівнює: $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точніша, якщо проміжок Δt буде зменшуватися.

Таким чином, можна вважати, якщо Δt наближається до нуля, то середня швидкість $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ буде наближатися до швидкості в момент часу t_0.

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, в момент часу t_0 називається границя середньої швидкості при умові, що Δt наближається до нуля.

$$\upsilon_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Числа Δt, Δs називаються відповідно приростом часу, приростом шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, є границя відношення приросту шляху Δs до відповідного приросту часу Δt, коли приріст часу наближається до нуля.

Приклад 1.

Точка рухається прямолінійно по закону $s(t) = 5t^2 + t + 3$ (s — шлях в метрах, t – час в секундах). Знайдіть швидкість точки:

а) в довільний момент t_0; б) в момент часу t = 2 с.

Розв'язання

а) 1) нехай значення аргументу t_0 одержало приріст Δt, тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$.

2) Знайдемо відповідний приріст шляху

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 3 - (5\, t_0^2 + t_0 + 3) = 5\, t_0^2 + 10\, t_0 \Delta t + 5\Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 3 - 5t_0^2 - t_0 - 3 = 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t.$$

3) Знайдемо відношення приросту шляху до приросту часу (середню швидкість): $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(10t_0 + 1 + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t_0 + 1 + 5\Delta t$

4) Знайдемо границю відношення приросту шляху до приросту часу (середньої швидкості): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(10t_0 + 1 + 5\Delta t) = 10t_0 + 1$

Отже, миттєва швидкість точки в довільний момент часу t_0 дорівнює $10t_0 + 1$.

Отже, при заданому законі руху $s(t)$ миттєва швидкість $v(t)$ в довільний момент часу t обчислюється по формулі $v(t) = 10t + 1$.

б) Якщо t = - 2 с, то маємо $v(2) = 10 \cdot 2 + 1 = 21 \left(\dfrac{м}{с}\right)$;

Відповідь: а) $10t + 1$; б) $21\,\dfrac{м}{с}$.

Поняття дотичної до кривої.

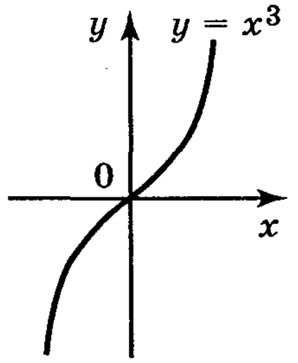


Рис. 21

В курсі геометрії ви познайомились з означенням дотичної до кола: дотичною до кола називається пряма, яка лежить в площині кола і має з колом лише одну спільну точку. Таке означення дотичної не може бути перенесено на всі криві (парабола, синусоїда, гіпербола тощо).

Наприклад, вісь *OY* має тільки одну спільну точку з графіком функції $y = x^3$, проте її не можна вважати дотичною до кубічної параболи в точці *0* (рис. 21).

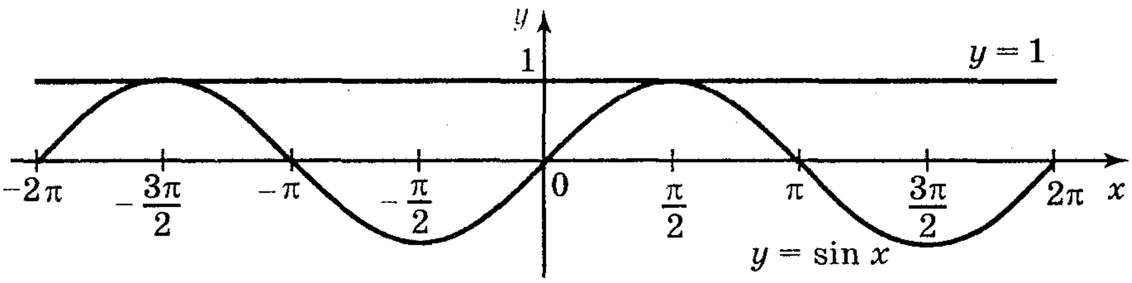


Рис. 22

Пряма $y = 1$ і синусоїда $y = \sin x$ мають безліч спільних точок (рис. 22), проте пряму $y = -1$ вважають дотичною до синусоїди.

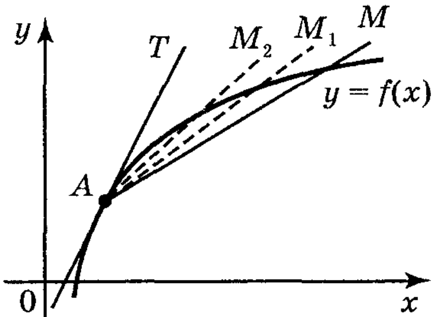


Рис. 23

Для введення означення дотичної до кривої розглянемо функцію $y = f(x)$ і її графік — криву лінію (рис. 23). Нехай точки *A і M* належать графіку функції $y = f(x)$, проведемо січну *AM.*

Зафіксуємо точку А. Нехай точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А. При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А і в граничному положенні при наближенні точки *M* до точки А січна займе положення прямої АТ. Пряму АТ називають дотичною до даної кривої в точці А.

Дотичною АТ до графіка функції $y = f(x)$ в точці А називається граничне положення січної *AM,* коли точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А.

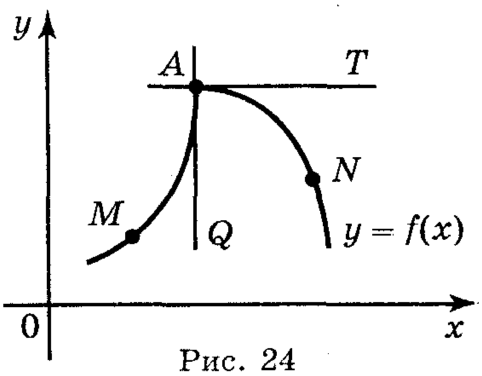


Рис. 24

Слід мати на увазі, що не в усякій точці кривої можна провести до неї дотичну. На рис. 24 зображено криву $y = f(x)$, яка в точці А не має дотичної, бо якщо точка *M* буде наближатися до точки А по лівій частині кривої, то січна МА займе граничне положення AQ.

Якщо точка *N* буде наближатися по правій частині кривої, то січна *NA* займе граничне положення *AT.* Одержуємо дві різні прямі AQ і AT, це означає, що в точці А до даної кривої дотичної не існує.

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0; y_0)$.

Дотична — це пряма, а положення прямої $y = kx + b$, яка проходить через точку А(x_0; y_0) визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = \mathrm{tg}\,\alpha$, де α — кут між прямою і додатнім напрямом осі OX (рис. 25).

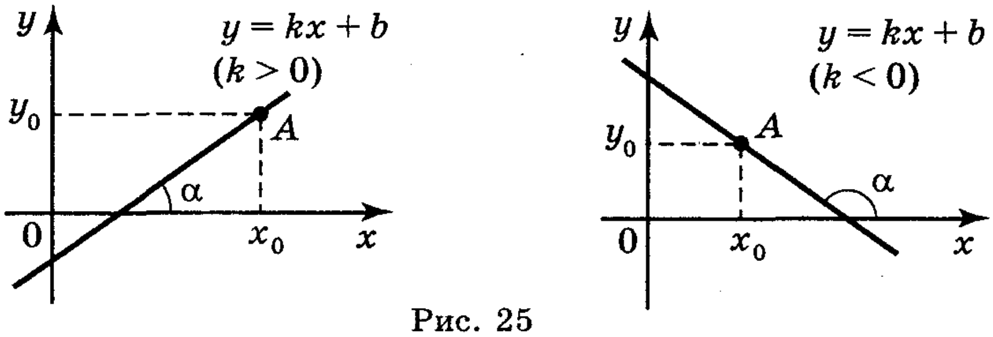


Рис. 25

Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число *k*.

Нехай в точці А(x_0; y_0) (рис. 26) кривої $y = f(x)$ існує дотична, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

1) Надамо аргументу x_0 приросту Δx, одержимо нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.

2) Знайдемо відповідний приріст функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

3) Знайдемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Із трикутника *AMK* маємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\angle MAK$. Так як $\angle MAK = \varphi$ — куту нахилу січної *AM з* додатним напрямом осі *OX,* то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\varphi$.

4) Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ і точка М буде переміщуватися по кривій, наближаючись до точки А.

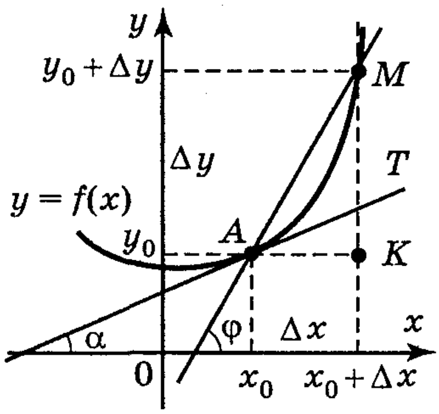


Рис. 26

При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А, а величина кута φ буде змінюватися зі зміною Δx. Граничним положенням січної *AM* при $\Delta x \to 0$ буде дотична АТ, яка утворює з додатним напрямом осі ОХ деякий кут, величину якого позначимо через α.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ — кутовий коефіцієнт дотичної.

Вправа

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2 - 4x$ в точці з абсцисою $x = 2{,}5$.

Відповідь: $k = 1$.

Ці дві задачі розв'язуються одним і тим самим способом, який складається з таких етапів:

1) незалежній змінній *x* надаємо приросту Δx;

2) знаходимо приріст залежної змінної — Δy;

3) знаходимо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) знаходимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ використовується при розв’язуванні і інших важливих задач (зокрема, про швидкість протікання хімічних реакцій, знаходження густини неоднорідного стержня, теплоємності тіла при нагріванні, сили змінного струму в провіднику та інш.), тому доцільно всебічно вивчити властивості цієї границі, зокрема, вказати способи її обчислення.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_o даного проміжку, надамо значенню x_o довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_o+\Delta x$ належала даному проміжку, тоді

1) Обчислимо в точці x_o приріст $\Delta y = \Delta f(x_o)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o);$$

2) Складемо відношення: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta x \to 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_o і позначають $f'(x_o)$ або y' (читається еф штрих від x_o або y штрих).

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_o називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 + 2$ в точці x_o.

Розв'язання

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 3(x_o + \Delta x)^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 =$$
$$= 3x_0^2 + 6x_o\Delta x + 3\Delta x^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 = 6x_o\Delta x + 3\Delta x^2 = \Delta x(6x_o + 3\Delta x).$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x.$$

Знайдемо похідну даної функції в точці x_0:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(6x_0 + 3\Delta x) = 6x_o + 3 \cdot 0 = 6x_o.$$

Відповідь: $6x_o$.

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $f(x) = kx + b$ (k і b постійні) у точці x_o.

Розв'язання

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - kx_o - b = kx_o + k\Delta x - kx_o = k\Delta x.$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

Отже, $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$, або $(kx + b)' = k$.

Відповідь: k.

З другого прикладу можна зробити висновок, що похідна лінійної функції є постійна величина, яка дорівнює кутовому коефіцієнту прямої. Якщо в формулі $(kx + b)' = k$ покласти $k = 0$, $b = C$, де C — довільна постійна, то одержимо, що $C' = 0$, тобто похідна постійної дорівнює нулю.

Якщо в формулі покласти $k = 1$, $b = 0$, то одержимо $x' = 1$.

Функцію, яка має похідну в точці x_o, називають диференційованою в цій точці.

Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають диференційованою на цьому проміжку. Операція знаходження похідної називається диференціюванням.

Нехай D_1 — множина точок, у яких функція $y = f(x)$ диференційована. Якщо кожному $x \in D_1$ поставити у відповідність число $f'(x)$, то одержимо нову функцію з областю визначення – D_1. Цю функцію позначають f':

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила диференціювання

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхня сума

диференційована в цій точці і $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$. або коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

Доведення

Розглянемо функцію $y = f(x) + g(x)$. Зафіксуємо x_o і надамо аргументу приросту Δx. Тоді

$$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = f(x_o + \Delta x) + g(x_o + \Delta x) - f(x_o) - g(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) + g(x_o + \Delta x) - g(x_o) = \Delta f + \Delta g,$$

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Наслідки

а) Похідна різниці дорівнює різниці похідних. Нехай $y(x) = f(x) - g(x)$, тоді $f(x) = y(x) + g(x)$ і

$$f'(x) = y'(x) + g'(x), \text{ звідси } y'(x) = f'(x) - g'(x).$$

б) Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, тобто

$$(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))' = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x)$$

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхній добуток також — диференційована функція в цій точці і

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

або коротко говорять: похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну другої функції.

Доведення

Розглянемо функцію $y = f(x) \cdot g(x)$. Зафіксуємо x_o і надамо аргументу приросту Δx, тоді

1) $\Delta y = f(x_o + \Delta x) \cdot g(x_o + \Delta x) - f(x_o) \cdot g(x_o)$.

Оскільки $f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta f$, $g(x_o + \Delta x) = g(x_o) + \Delta g$, то

$\Delta y = (f(x_o) + \Delta f) \cdot (g(x_o) + \Delta g) - f(x_o) \cdot g(x_o) = f(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_o) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_o) \cdot g(x_o) = f(x_o) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_o) + \Delta f \cdot \Delta g$.

2) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0)\cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0)\cdot \Delta g}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f \cdot g(x_0)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$

$= f(x_0)\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$

$f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x =$

$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0)$.

Отже, $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x).\ g(x) + f(x).\ g'(x)$.

Наслідки

а) Постійний множник можна винести за знак похідної: $(cf(x))' = cf'(x)$.

Дійсно, $(cf(x))' = c' f(x) + c f'(x) = 0 \cdot f(x) + c\,f'(x) = c\,f'(x)$.

б) Похідна добутку декількох множників дорівнює сумі добутків похідної кожного із них на всі останні, наприклад:

$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$.

Теорема. Якщо функції f(x) і g(x) диференційовані в точці x і $g(x) \neq 0$, то функція $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ диференційована в цій точці і $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Доведення

Формулу похідної частки можна вивести, скориставшись означенням похідної. Проте це зробити можна простіше.

Нехай $y(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, тоді $f(x) = y(x) \cdot g(x)$. Знайдемо похідну функції $f(x)$, скориставшись теоремою про похідну добутку, $f'(x) = y'(x) \cdot g(.x) + y(x) \cdot g'(x)$. Виразимо з цієї формули $y'(x)$:

$y'(x) = \dfrac{f'(x) - y(x)\cdot g'(x)}{g(x)}$ і підставимо замість $y(x)$ значення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, тоді будемо мати:

$$y'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{\left(f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)\right)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Отже, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x);$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Лекція 11

Тема: Умови монотонності та екстремуму функції. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Мета: вивчити достатню умову монотонності функції та правило дослідження функції на монотонність. Розвиток логічного мислення, пам’яті, уваги. Виховувати працелюбність, прививати бажання мати якісні глибокі знання, культуру мовного спілкування в ході бесіди

Методи: словесний, наочний

План:

1 Достатня умова монотонності функції.
2 Критичні точки функції.
3 Правило дослідження функції на монотонність

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
таблиця похідних

Література:

Афанасьєва О.М. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей).-К.: Вища школа, 2001.-С. 136-137

Теоретичні відомості:

Тема: Умови монотонності та екстремуму функції. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a;\ b)$ і $x_0 \in (a;\ b)$. Кажуть, що $f(x)$ **зростає** в точці x_0, якщо існує окіл точки x_0, в якому $f(x) < f(x_0)$ для $x < x_0$, а для $x > x_0$

$$f(x) > f(x_0).$$

Аналогічно за означенням $f(x)$ **спадає** в точці $x_0 \in (a;\ b)$, якщо існує її окіл, в якому $f(x) > f(x_0)$ для $x < x_0$, а $f(x) < f(x_0)$ для $x > x_0$.

Теорема 2 **(достатня ознака зростання і спадання функції в точці). Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in (a;\ b)$ і $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0.**

Доведення. Проведемо доведення для випадку, коли $f'(x_0) > 0$. Оскільки $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, то існує окіл точки x_0, в якому $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ для $x \neq x_0$. Звідси випливає, що в цьому околі $f(x) < f(x_0)$ для $x < x_0$, тобто $f(x)$ зростає в точці x_0. Аналогічно доводиться випадок, коли $f'(x_0) < 0$.

***Теорема 3* (достатня ознака зростання і спадання функції на проміжку). Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона (спадає) на цьому інтервалі.**

ОЗНАКИ МОНОТОННОСТІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо деякі ознаки монотонності і строгої монотонності диференційовних на проміжку функцій.

***Теорема 4* (ознака монотонності). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Тоді:**

1) для того щоб функція $f(x)$ була монотонно зростаючою на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, аби виконувалася нерівність $f'(x) \geq 0$ для всіх $x \in (a; b)$;

2) для того щоб функція $f(x)$ була монотонно спадною на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, аби виконувалась нерівність $f'(x) \leq 0$ для всіх $x \in (a; b)$.

Доведення. Проведемо доведення першого пункту теореми.

Необхідність. Нехай функція $f(x)$ неперервна і неспадна на $[a; b]$ і має скінченну похідну $f'(x)$ в інтервалі $(a; b)$. Покажемо, що $f'(x) \geq 0$ для $x \in (a; b)$. За умовою для будь-якого $x \in (a; b)$ існує $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Крім того, для $t > x$ із $(a; b)$ $f(t) \geq f(x)$ і, отже, для $t > x$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0,$$

тому

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x) \geq 0,$$

що і доводить необхідність.

Достатність. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $f'(x) \geq 0$ для будь-яких $x \in (a; b)$. Задамо довільні x_2 і x_1 із $[a; b]$ за умови $x_2 > x_1$. За теоремою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, звідки $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Отже, для x_1 і x_2 із $(a; b)$ при $x_2 > x_1$ дістаємо $f(x_2) \geq f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ зростає.

***Теорема 5* (ознака строгої монотонності). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Для того щоб функція $f(x)$ була зростаючою (спадною) на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо виконання двох умов:**

1) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для будь-якого $x \in (a; b)$;

2) рівність $f'(x) = 0$ не повинна виконуватися в жодному інтервалі, що лежить в $[a; b]$.

***Теорема 6* (достатня ознака строгої монотонності). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то $f(x)$ зростає на $[a; b]$, якщо ж $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то $f(x)$ спадає на $[a; b]$.**

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

1. Знайти нулі функції $f'(x)$, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ (якщо вони є), і розбити інтервал $(a;\ b)$ за допомогою знайдених коренів $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, на інтервалі $(a;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, …, $(x_{k-1};\ x_k)$, $(x_k;\ b)$.

2. Визначити знак похідної на кожному із таких інтервалів. Якщо при цьому виявиться, що на двох сусідніх інтервалах $(x_{i-1};\ x_i)$ $(x_i;\ x_{i+1})$ похідна $f'(x)$ має один і той самий знак, то функція строго монотонна в інтервалі $(x_{i-1};\ x_{i+1})$. Наприклад, якщо $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростаюча, якщо $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадна.

Строга монотонність за теоремою 6 зберігається, якщо до частинного інтервалу приєднати його кінці, на яких за умовою функція неперервна. Якщо $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ неперервна, а в інтервалі $(a;\ b)$ похідна $f'(x)$ не перетворюється на нуль, то на проміжку $[a;\ b]$ функція $f(x)$ буде строго монотонною, а саме при $f'(x) > 0$ — зростаючою, при $f'(x) < 0$ — спадною.

Знайти інтервали зростання і спадання функції

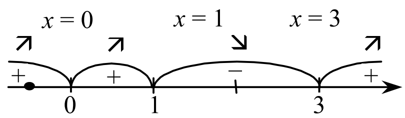
Приклад

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 15.$$

● Маємо

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3) = 0,$$

звідки



Похідна $f'(x)$ неперервна для $x \in (-\infty;\ +\infty)$ і перетворюється на нуль лише в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, тому вона в інтервалах $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 3)$ і $(3;\ +\infty)$ зберігає знак. Оскільки $f'(-1) > 0$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, $f'(2) < 0$, $f'(5) > 0$, $f'(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty;\ 0)$, $f'(x) > 0$, $x \in (0;\ 1)$, $f'(x) < 0$, $x \in (1;\ 3)$, $f'(x) > 0$, $x \in (3;\ +\infty)$.

Тому функція $f(x)$ зростає на інтервалах $(-\infty;\ 0)$; $(0;\ 1)$; $(3;\ +\infty)$ і спадає на інтервалі $(1;\ 3)$.

Дослідження на максимум та мінімум

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ b]$ і x_0 — внутрішня точка проміжку: $x_0 \in (a;\ b)$.

Означення. Функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум, якщо існує окіл точки x_0, що для всіх x, $x \neq x_0$, цього околу виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$. Саме значення $f(x_0)$ називатимемо **максимумом (локальним максимумом) функції** $f(x)$ в точці x_0 і позначатимемо $\max f(x) = f(x_0)$.

Функція $f(x)$ в точці x_0 має *мінімум*, якщо існує окіл точки x_0, що для всіх x ($x \neq x_0$), які належать цьому околу, буде виконуватись нерівність $f(x) \ge f(x_0)$. При цьому саме значення $f(x_0)$ називатимемо *мінімумом (локальним мінімумом)* функції $f(x)$ в точці x_0 і позначатимемо $\min f(x) = f(x_0)$.

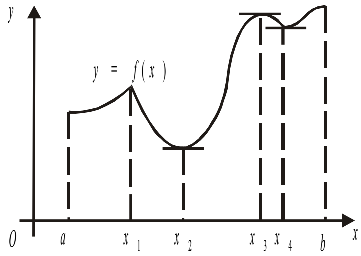


Рис. 5.31

Далі, якщо для $x \neq x_0$ у даному околі точки x_0 $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, функція $f(x)$ має *строгий максимум (строгий мінімум)*.

Максимум і мінімум функції в точці об'єднує спільний термін — **екстремум (локальний екстремум)** функції в точці.

Необхідні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна в інтервалі $(a; b)$.

Означення. Точки інтервалу $(a; b)$, в яких похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль ($f'(x) = 0$), називаються *стаціонарними точками* функції $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$.

Геометрична інтерпретація. Кожна стаціонарна точка $x_0 \in (a; b)$ функції $f(x)$, диференційовної в інтервалі $(a; b)$, характеризується тим, що дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ паралельна осі абсцис, оскільки кутовий коефіцієнт цієї дотичної $k = f'(x_0) = 0$.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна на проміжку $(a; b)$ за винятком, можливо, скінченного числа точок, в яких функція не має похідної.

Теорема 1. **Для того щоб точка x_0 була точкою екстремуму функції, визначеної в околі цієї точки, необхідно, щоб похідна функції в цій точці дорівнювала нулю ($f'(x) = 0$) або функція була недиференційовна в цій точці.**

Доведення випливає з теореми Ферма.

Означення. Для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a; b]$ і диференційовної на інтервалі $(a; b)$ (за винятком, можливо, скінченного числа точок, де не існує похідної $f'(x)$ в цьому інтервалі), точки, де її похідна дорівнює нулю або не існує, називатимемо *критичними її точками* на проміжку $[a; b]$, або точками, *«підозрілими» на екстремум* функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Приклад

Знайти критичні точки функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 15, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

● Маємо $f'(x) = x^2 - 5x + 6$. Розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, дістанемо $x = 2$ і $x = 3$. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна, то критичними точками будуть лише стаціонарні, тобто точки $x = 2$ і $x = 3$.

Достатні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Будемо говорити, що похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак із плюса на мінус, якщо існує такий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, що для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) > 0$, а для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$. Аналогічно $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак із мінуса на плюс, якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, що для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) < 0$, а для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$.

Нарешті, $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінює знака, якщо для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x)$ зберігає один і той самий знак (буде або додатна, або від'ємна).

Теорема 2. **Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:**

1) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий максимум;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Приклад Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20.$$

• Маємо

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3).$$

Із рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо дві стаціонарні точки: $x = 2$ і $x = 3$. При переході через точку $x = 2$ похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, отже, за теоремою 2 функція $f(x)$ в точці $x = 2$ має максимум: $\max f(x) = f(2) = 8$.

Аналогічно знайдемо, що в точці $x = 3$ функція $f(x)$ має мінімум: $\min f(x) = f(3) = 7$.

Теорема 3. **Нехай функція $f(x)$ має похідні до n-го *порядку включно в околі* x_0, причому функція $f^{(n)}(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, але $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тоді*:**

1) якщо n парне ($n \geq 2$), то функція $f(x)$ в точці x_0 має строгий екстремум, причому мінімум — при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і максимум — при $f^{(n)}(x_0) < 0$;

2) якщо n непарне, то функція $f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.

Приклад Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5. \bullet$$

• Знаходимо похідну $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$. Рівняння $f'(x) = 0$ має одну стаціонарну точку $x = 1$, тому $f'(1) = 0$. Далі,

$$f''(x) = 6x - 6,\ f''(1) = 0,\ f'''(x) = 6,\ f'''(1) = 6 \neq 0.$$

Отже, $f'(1) = f''(1) = 0$, але $f'''(1) \neq 0$. За теоремою в стаціонарній точці $x = 1$ функція $f(x)$ екстремуму не має.

Теорема 4. **Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі стаціонарної точки x_0, а в самій стаціонарній точці має похідну другого порядку. Тоді:**

1) якщо $f''(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має мінімум;

2) якщо $f''(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум;

3) якщо $f''(x_0) = 0$, то в точці x_0 може бути екстремум, а може і не бути.

Доведення. Нехай $f''(x_0) > 0$, тоді, ураховуючи, що x_0 — стаціонарна точка ($f'(x_0) = 0$), дістаємо

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Оскільки границя виразу $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ в точці x_0 додатна, то існує окіл точки x_0, що для всіх $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а для $x > x_0$ $f'(x) > 0$ із вказаного околу. У точці x_0 функція $f(x)$ неперервна, тому за теоремою 2 в точці x_0 функція має мінімум.

Аналогічно доводиться теорема про максимум функції $f(x)$ в точці x_0, якщо $f''(x_0) < 0$.

Приклад Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^6$.

• Маємо $f'(x) = 6x^5$. Стаціонарна точка одна: $x = 0$.

1) За теоремою 2 при переході через стаціонарну точку $x = 0$ похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс. Отже, у точці $x = 0$ функція $f(x)$ має строгий мінімум.

2) За теоремою 3 маємо $f''(x) = 30x^4$, $f'''(x) = 120x^3$, $f^{(4)}(x) = 360x^2$, $f^{(5)}(x) = 720x$, $f^{(6)}(x) = 720$, причому $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, але $f^{(6)}(0) = 720 > 0$. Оскільки число 6 парне, то за теоремою 3 в точці $x = 0$ функція $f(x)$ має строгий мінімум.

3) Оскільки $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, то теорема 4 не дає відповіді про екстремум функції в стаціонарній точці $x = 0$.

4) Дослідження функції на екстремум можна виконати і без використання диференційовності. Оскільки $|x| > 0$ для $x \neq 0$ і $|0| = 0$, то і $x^6 = 0$ для $x = 0$, звідки функція $f(x) = x^6$ у точці $x = 0$ має строгий мінімум.

Цей приклад показує, що при дослідженні функції $f(x)$ на екстремум треба звернути увагу на вид самої функції, щоб обрати найбільш раціональний спосіб розв'язування конкретної задачі.

НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ (АБСОЛЮТНИЙ ЕКСТРЕМУМ)

1. Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку. Розглянемо деякі випадки знаходження найбільших і найменших значень функцій на проміжку, коли функція неперервна і диференційовна на всьому проміжку за винятком точок, де в неї немає скінченної похідної.

І. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a; b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).

2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов'язково виясняти, чи буде в них екстремум).

3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Приклад Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 5x + \dfrac{1}{5x}$ на проміжку [0,01; 100].

● У даному випадку похідна $f'(x) = \dfrac{25x^2 - 1}{5x}$ в інтервалі [0,01; 100] має тільки один корінь — $x = 0{,}2$. Обчислимо значення функції в стаціонарній точці $x = 0{,}2$ і на кінцях проміжку [0,01; 100]:

$$f(0{,}2) = 2,\ f(0{,}01) = f(100) = 100{,}01.$$

Звідси

$$\max_{x \in [0{,}01; 100]} f(x) = 100{,}01, \quad \min_{x \in [0{,}01; 100]} f(x) = 2.$$

2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ за винятком скінченного числа точок і має скінченне число стаціонарних точок.

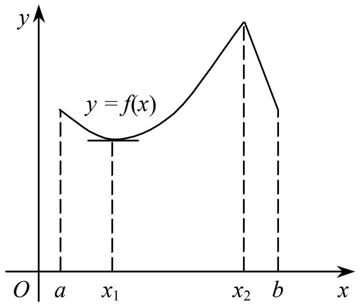


Рис. 5.32

У цьому випадку критичними точками функції $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$ будуть не тільки стаціонарні точки, а й точки, в яких не існує похідної (рис. 5.32). Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції застосовується алгоритм випадку 1, лише з тією різницею, що потрібно обчислити додатково значення функції в точках, де відсутня похідна.

Приклад

Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \left(x^4 - 1\right)^{2/3}$ на проміжку $[0; 2]$.

• Після знаходження похідної функції і розв'язання рівняння $f'(x) = 0$ матимемо, що критичною точкою буде тільки точка $x = 1$. Знаходимо значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку і в критичній точці:

$$f(0) = 1,\ f(2) = 15^{\frac{2}{3}},\ f(1) = 0.$$

Звідси

$$\min_{x \in [0;2]} f(x) = f(1) = 0,\ \max_{x \in [0;2]} f(x) = f(2) = 15^{\frac{2}{3}}.$$

3. Функція $f(x)$ неперервна — диференційовна в інтервалі $(a; b)$ за винятком, можливо, скінченного числа точок і має скінченне число стаціонарних точок.

У цьому випадку функція $f(x)$ може не мати найбільшого або найменшого значення на проміжку $[a; b]$. Наприклад, функція $f(x) = x^2$ в інтервалі $(0; 1)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значення; функція $f(x) = \sin x$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ має найбільше значення, що дорівнює 1, і найменше значення, що дорівнює -1; функція $f(x) = (x - 12)^2 + 30$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ не має найбільшого значення, але має найменше значення, що дорівнює 30; функція $f(x) = 5x^2$ на проміжку $(0; 1]$ не має найменшого значення, але має найбільше значення, що дорівнює 5.

Дослідження функції $f(x)$, що задовольняє умовам 3 на проміжку $[a; b]$, на найбільше і найменше значення можна виконати так, як і у випадку 2 для проміжку $[a; b]$, з тією лише різницею, що коли немає $f(a)$, то його замінюють граничним значенням $\lim_{x \to a} f(x) = A$, а коли немає $f(b)$, то його також замінюють граничним значенням $\lim_{x \to b} f(x) = B$. Потім з порівняння значень функції $f(x)$, як у випадку 2, включаючи граничні значення A (якщо немає $f(a)$) і B (якщо немає $f(b)$), найбільшим значенням виявиться граничне, то воно і буде найбільшим значенням функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Якщо найбільшим значенням функції виявиться граничне, то $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ не має найбільшого значення. Аналогічно досліджується питання про найменше значення $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Приклад

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$ в інтервалі $(0; 2)$.

• Оскільки $f(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 15^{\frac{2}{3}}$, то найбільшим із цих значень буде $15^{\frac{2}{3}}$, яке є граничним, отже, функція не має найбільшого значення в інтервалі (0; 2). Найменшим значенням буде $f(1) = 0$, отже, $f(1) = 0$ є найменшим значенням функції $f(x)$ в інтервалі (0; 2).

Лекція 12

Тема: Первісна та її властивість. Невизначений інтеграл та його властивості

Мета: вивчення понять первісної та невизначеного інтеграла, основних формул інтегрування та їх викоритання при розв´язуванні вправ

Методи: Словесний, практичний

План:

5 Первісна та її властивість.
6 Невизначений інтеграл та його властивості.
7 Таблиця основних невизначених інтегралів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.- С. 247-253.

Теоретичні відомості

Тема: Первісна та її властивість. Невизначений інтеграл та його властивості

1. При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати *s(t)* матеріальної точки. Миттєва швидкість *v*(*t*) дорівнює похідній функції *s(t)*, тобто *v(t)* = *s'(t)*.

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості *v(t)* руху точки знайти пройдений нею шлях *s(t),* тобто знайти таку функцію s(і), похідна якої дорівнює *v*(*t*). Функцію s(*t*) таку, що *s'(t) = v(t)*, називають первісною функції *v(t)*. Наприклад, якщо *v{t) = gt,* то $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ є первісною функції *v(t),* оскільки

$$g'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^I = \frac{g\cdot 2t}{2} = gt = v(t).$$

Функція *F(x)* називається *первісною* функції *f(x)* на деякому проміжку, якщо для всіх *x* із цього проміжку виконується рівність: *F'(X) = f(x).*

Наприклад, функція *F(x)* = sin *x* є первісною функції *f(x) = cos x* для *x* є *R,* бо (sin *x)'* = cos *x;* функція *F(x) = tg x* є первісною функції $f(x) = \frac{1}{cos^2 x}$, бо $F'(x) = (tgx)' = \frac{1}{cos^2 x} = f(x)$ для всіх *x,* крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, *n* є *Z.*

Виконання вправ

Покажіть, що функція *F(x)* є первісною функції *f(x)* для вказаних значень *x:*

1. *F(x) = kx, f(x) = k, x* є R.
2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $f(x) = x^n$, *x* є (0; $+\infty$), $n \neq -1$.
3. $F(x) = ln|x|$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
4. $F(x) = e^x$, $f(x) = e^x$, *x є R.*
5. $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$, $f(x)=a^x$, *x є R.*
6. *F(x) = -cos x, f(x) = sin x, x є R.*
7. *F(x) = -ctg x,* $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$.

III. Сприймання і усвідомлення основної властивості первісної, поняття невизначеного інтеграла.

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції *f(x).*

Дійсно, $F_1^I(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)^I = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$, $F_2^I(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^I = x^2 + 0 = x^2 = f(x)$,

$$F_3^I(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 5\right)^I = x^2 - 0 = x^2 = f(x).$$

Взагалі будь-яка функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ + C, де C — постійна, є первісною функції x^2. Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначне.

Теорема 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної С функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$.

Доведення

Оскільки $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$.

Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, а ця рівність означає, що $F(x) + C$ є первісною для функції $f(x)$.

Теорема 2. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції $f(x)$ на цьому проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де С — деяка стала (число).

Доведення

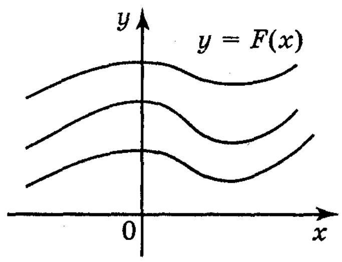


Рис. 87

Нехай $F(x)$ і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, $F_1'(x) = f(x)$. Похідна різниці $g(x) = F(x) - F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Якщо $g'(x) = 0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції $y = g(x)$ у кожній точці цього проміжку паралельна осі OX. Тому графіком функції $y = g(x)$ є пряма, яка паралельна осі OX, тобто $g(x) = C$, де C — деяка стала. Із рівностей $g(x) = C$, $g(x) = F_1(x) - F(x)$ випливає, що $F_1(x) - F(x) = C$, або $F_1(x) = F(x) + C$.

Теореми 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції f одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі OY (рис. 87).

Нехай функція f має на деякому проміжку первісну. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку називають невизначеним інтегралом цієї функції і позначають $\int f(x)dx$. функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією.*

З доведених теорем випливає, що $\int f(x)dx = F\{x) + C$, де $F(x)$ — яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку, С — довільна стала (її називають сталою інтегрування). Наприклад, функція $\sin x$ є первісною для функції $\cos x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, тому можна записати, що

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

IV. Сприймання і усвідомлення таблиці первісних (таблиці невизначених інтегралів).

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (таблицю невизначених інтегралів) для функцій, похідні яких відомі (таблиця 9).

Таблиця 9 Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція f(x)	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Для даної функції *f(x)* знайдіть первісну, графік якої проходить через задану точку А:

а) $f(x) = x^4$; А(-1; 0); б) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, А(0; 1); в) $f(x) = \sin x$, $A(\pi; 2)$;

г) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, А$\left(\frac{\pi}{4}; -1\right)$; д) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, А$\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

Відповідь: а) $\frac{x^5+1}{5}$; б) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + 1$; в) $-\cos x + 1$; г) $tg\, x - 2$; д) $-ctgx + \sqrt{3}$.

Математичний диктант.

Запишіть первісні для функцій:

1) x^7; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{x^3}$; 4) $\sqrt[5]{x}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) e^x;

7) π^x; 8) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 9) $\frac{1}{\sin^2 x}$; 10) $\cos x$; 11) $\sin x$; 12) $x\sqrt{x}$

Відповідь: 1) $\frac{x^8}{8}$+C; 2) $ln|x|$ +C; 3) $-\frac{1}{2x^2}$+C; 4) $\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$ +C; 5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ +C; 6) e^x + C; 7) $\frac{\pi^x}{\ln \pi}$+C; 8) tgx+C; 9) $-ctgx$ + C; 10) $sinx$ + C; 11) $-cosx$ + C; 12) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$.

Правила знаходження первісних можна одержати за допомогою правил диференціювання.

Правило 1. Якщо *F(x)* і *G(x)* — первісні відповідно функцій *f(x)* і *g(x)* на деякому проміжку, то функція *F(x) ± G(x)* є первісною функції *f(x) ± g(x)*.

Дійсно, оскільки $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, то $(F(x)\pm G(x))'=F'(x)\pm G(x)=f(x)\pm g(x)$.

Приклад 1. Знайдіть первісні для функції $f(x) = x + \cos x$.

Розв'язання

Оскільки для *x* одна із первісних є $\frac{x^2}{2}$, а для cos *x* однією із первісних є sin *x*, то однією із первісних функції $x + \cos x$ є функція $\frac{x^2}{2} + \sin x$, отже, $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Відповідь: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Правило 2. Якщо *F(x)* є первісною для функції *f(x)*, а *C* — стала, то *CF(x)* — первісна для функції *Cf(x)*.

Дійсно, оскільки $F(x) = f(x)$ то $(CF(x))' = CF'(x) = Cf(x)$.

Приклад 3. Знайдіть первісні для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Розв'язання

Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то однією із первісних для функції $5e^x$ є $5e^x$; оскільки однією із первісних для функція *sinx* є *-cos x*, то однією із первісних для функції 7sin*x* є -7cos*x*; первісною функції $3x^2$ є $3\cdot\frac{x^3}{3} = x^3$. Отже, $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$ — первісні для функції
$f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Відповідь: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Правило 3. Якщо *F(x)* є первісною для *f(x),* а *k* і *b* — постійні числа, причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$.

Дійсно, за правилом похідної складеної функції маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b).$$

Приклад 5. Знайдіть первісні для функцій: а) $f(x) = (7 - 3x)^5$; б) $f(x) = e^{2x-1}$.

Розв'язання

а) Оскільки первісною для функції x^5 є функція $\frac{x^6}{6}$, то згідно з правилом 3 шукані первісні: $F(x) = -\frac{1}{3}\frac{(7-3x)^6}{6} + C = -\frac{(7-3x)^6}{18} + C$.

б) Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то згідно з правилом 3 маємо: $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

Відповідь: а) $F(x) = -\frac{(7-3x)^6}{18} + C$; б) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^2$; б) $f(x)= \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3}$ в) $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$; г) $f(x) = 5\cdot\sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x)=5\cos x-3\sin x$; б) $f(x)=2e^x + 3\cos x$; в) $f(x)=\dfrac{4}{x} +10^x$; г) $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x} - \dfrac{5}{\sin^2 x}$.

2. **Означення.** Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.1}$$

де $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз, C - довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають ***інтегруванням*** цієї функції.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx,\ \ a \neq 0 \text{ – стала.}$$

2. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то й $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

1) $\int f(kx)dx = \dfrac{1}{k} F(kx) + C$,

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$,

3) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k} F(kx+b) + C$,

де k та b - сталі величини.

3. Таблиця основних інтегралів

$\int 0 \cdot dx = C$
$\int dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
$\int e^x = e^x + C$
$\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Лекція 13

Тема: Метод заміни змінної та інтегрування частинами

Мета: вивчення методів обчислення невизначеного інтеграла. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності.

Методи: словесний, практичний

План:

1 Метод заміною змінної (метод підстановки).

2 Метод інтегрування частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: таблиця невизначених інтегралів

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов.- М.: Наука, 1990.-С.255-266.

Теоретичні відомості:

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

***Теорема* . Якщо *f*(*x*) — неперервна, а** $x = \varphi(t)$ **має неперервну похідну, то:**

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = |\varphi(x) = t| = \int f(t)\,dt. \qquad (2)$$

Зауваження. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціалу), тому, наприклад:

$$\left(\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right) \Rightarrow \left(\int (u(x))^{\alpha}\,du(x) = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int (\operatorname{tg} x)^{\alpha}\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{(\operatorname{tg} x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. \right.$$

У такому розумінні слід розглядати і всю таблицю інтегралів.

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5\,dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6(t-\operatorname{arctg}t)+C=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Варіант заміни змінної інтегрування $\varphi(x)=t$ (2) зручний тоді, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$ ..

Приклад.

$$\int\sin^5 x\cos x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{array}\right|=\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{6}\sin^6 x+C..$$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом.

Метод безпосереднього інтегрування

При безпосередньому інтегруванні використовується формула (2) варіанта заміни змінної, але саму заміну не записують (її роблять усно) при цьому використовують операцію внесення функції під знак диференціала. Отже, якщо $\int f(u)du=F(u)+C,$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x))=F(\varphi(x))+C.$$

Зокрема, коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x)=ax+b,$, дістаємо: $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C..$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x)=d(\varphi(x)+C).$$

Приклад. $\int\frac{\sin x dx}{1+3\cos x}=\int\frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x}=$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C.$$

Метод інтегрування частинами

***Теорема* . Якщо функції *u*(*x*) та *v*(*x*) мають неперервні похідні, то:**

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v du. \qquad (3)$$

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким **правилом**:

— при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u\cdot dv$, тобто $f(x)dx=u\cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x\sin x dx=\left|\begin{array}{l}u=x,\ du=dx\\ dv=\sin x dx\Rightarrow\\ \Rightarrow\ \int dv=\int\sin x dx\Rightarrow\\ \Rightarrow\ v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int-\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий приклад.

$$\int x^2e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2,\ du=2xdx;\\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow\ v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=x,\ du=dx;\\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow\ v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=e^{3x}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)+C.$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій $u(x)$ та $v(x)$:

$\int\underset{u}{P(x)}\cdot\underset{dv}{\sin(ax)dx}$; $\int\underset{u}{P(x)}\cdot\underset{dv}{\cos(ax)dx}$;

$$\int \underset{u}{\underline{P(x)}} \cdot \underset{dv}{\underline{e^{ax}dx}};\ \int \underset{u}{\underline{\ln(ax)}} \cdot \underset{dv}{\underline{Q(x)dx}};\ \int \underset{u}{\underline{\operatorname{arctg} x}} \cdot \underset{dv}{\underline{Q(x)dx}};$$

$$\int \underset{u}{\underline{\arcsin(ax)}} \cdot \underset{dv}{\underline{Q(x)dx}}, \qquad (4)$$

де $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — алгебраїчна функція, $a \in R$.

Звичайно, не слід думати, що метод інтегрування частинами обмежується застосуванням тільки до інтегралів типу (4).

У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержується рівняння, із якого знаходять шуканий інтеграл.

Приклад.

$$G = \int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} \cos x = u, \ du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{vmatrix} =$$
$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} \sin x = u, \ du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{vmatrix} =$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - G.$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо $G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

Лекція 14

Тема: Визначений інтеграл та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.

Мета: Вивчення поняття визначеного інтегралу та його властивостей, заміна змінної та інтегрування частинами визначеного інтеграла. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Задачі, що приводять до визначеного інтеграла.
2 Означення визначеного інтеграла, геометричний зміст.
3 Властивості визначеного інтеграла.
4 Теорема Ньютона-Лейбніца.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Креслярське приладдя, плакати, калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с 267-279.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. - К.: АСК, 2001, с 365 - 385.

Теоретичні відомості

Тема: Визначений інтеграл та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Означення. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0,\ \ y = 0,\ \ x = a,\ \ x = b.$

На рис.1. зображені: класична криволінійна трапеція (*а*) та її вироджені випадки (*б*) та (*в*).

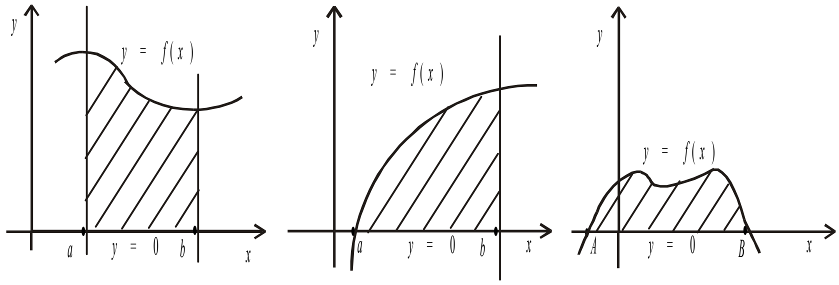


Рис. 1

Задача. Обчислити площу криволінійної трапеції *аАВв* (рис. 2).

Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, $i = (\overline{0,\ n})$ так що $a = x_0,\ b = x_n.$ Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$ Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$ (рис. 2).

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max \Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\xi_i \cdot \Delta x_i.$

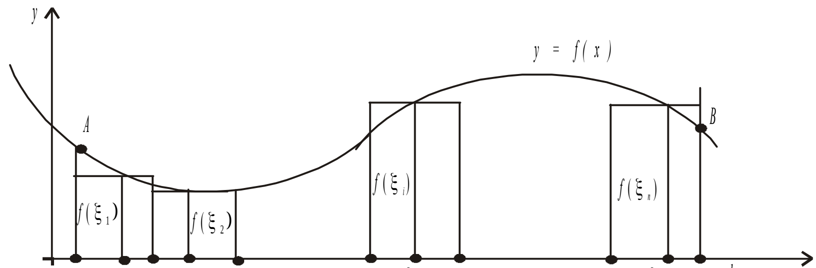


Рис. 2

Задача. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F} = \vec{e} \cdot f(x),\ |\vec{e}| = 1,$ що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x \in [a;\ b]$ (рис. 3).

Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, $i = (\overline{0,\ n}).$ На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i)$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (рис. 7.5).

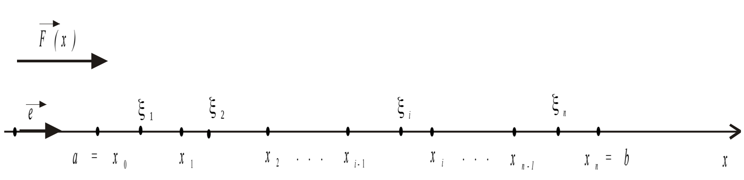


Рис. 3

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Робота *A* сили $\vec{F}$ на відрізку [*a*; *b*] знайдеться тоді так:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Означення. Сума типу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*.

Оперувати поняттям інтегральної суми доводиться у процесі розв'язку різних задач. Взагалі інтегральна сума може залежати від способу розбиття проміжка [*a*; *b*] на частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку [*a*; *b*]. Розіб'ємо [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = (\overline{1, n})$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$ і не залежить ні від способу розбиття [*a*; *b*] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* [*a*; *b*] і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx\,, \qquad (1)$$

де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

f(*x*) — підінтегральна функція;

f(*x*) *dx* — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку [*a*; *b*]; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Означення. Функція, для якої на [*a*; *b*] існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Далі буде показано, що неперервні функції — інтегровні.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x) \ge 0,\ \ x \in [a;\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 2).

Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x)=c=\text{const}$, то $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$.

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx.$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на [*a*; *b*], то

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0.$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: [*a*; *b*], [*a*; *c*], [*c*; *b*], то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

VII. Якщо $f(x)\ge 0$ і інтегровна для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то $\int_a^b f(x)dx \ge 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровні та $f(x)\ge g(x)$ для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m\le f(x)\le M$ для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

Доведення випливає як наслідок із властивостей I та VIII.

X. ***Теорема 7* (*про середнє*).**

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то знайдеться така точка $x=c\in[a,\ b],$ що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \qquad (2)$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c), c\in[a,\ b]$ та *b* – *a*, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x)\ge 0$ та неперервна на проміжку [*a*; *b*] (рис. 4).

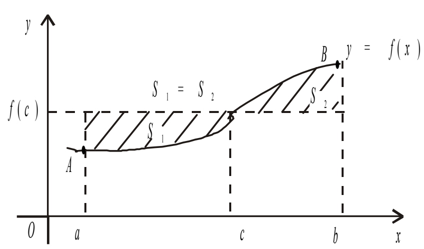


Рис. 4

Теорема **Ньютона—Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a; b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x). \quad (3)$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x) + C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b$$

(4)

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

Приклад. $\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)^5\Big|_0^{\ln 2} =$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - \left(e^0 - 1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5 - (1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$$

Лекція 15

Тема: Наближене обчислення визначеного інтеграла

Мета: вивчення методів наближеного обчислення визначеного інтеграла

Методи: словесний, практичний

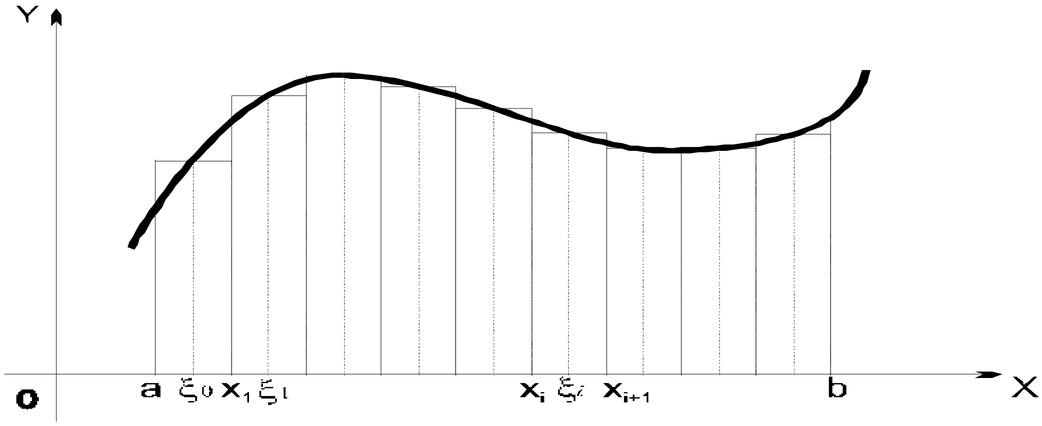
План:

1 Способи обчислення визначеного інтеграла.
2 Формули прямокутників.
3 Формула трапецій.
4 Формула Сімпсона.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, плакати

Література: Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990.-С.284-289.

Формули прямокутників і трапеції.



Мал. 1

Нехай треба обчислити значення визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ є деяка задана на проміжку $[a,b]$ неперервна функція. Існує багато прикладів обчислення подібних інтегралів, або за допомогою первісної, якщо вона виражається в скінченому вигляді, або ж – мінуючи первісну – за допомогою різних прийомів, як правило, штучних. Потрібно відмітити, однак, що всім цим вичерпується вузький клас інтегралів; за його межами зазвичай вдаються до різних методів наближеного обчислення.

В даній роботі можна ознайомитися з основними із цих методів, в яких наближені формули для інтегралів складаються по деякому числу значень підінтегральної функції, обчислених для ряду (зазвичай рівновіддалених) значень незалежної змінної.

Перші формули, які сюди відносяться, простіше всього отримуються із геометричних міркувань. Витлумачуючи визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ як площу деякої фігури, яка обмежена кривою $y=f(x)$, ми і ставимо перед собою задачу знаходження цієї площі.

Перш за все, вдруге використовуючи ту думку, яка привела нас до самого поняття про визначений інтеграл, можна розбити усю фігуру (мал. 1) на смуги, однієї і той же ширини $\Delta_{x_i}=\frac{b-a}{n}$, а потім кожну смугу наближено замінити прямокутником, за висоту якого прийнята будь-яка із його ординат. Це приведе нас до формули:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})\right],$$

де $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$. Тут шукана площа криволінійної фігури замінюється площею деякої ступінчатої фігури, яка складається із прямокутників (або ж, можна сказати, що визначений інтеграл замінюється інтегральною сумою). Ця наближена формула і називається формулою прямокутників.

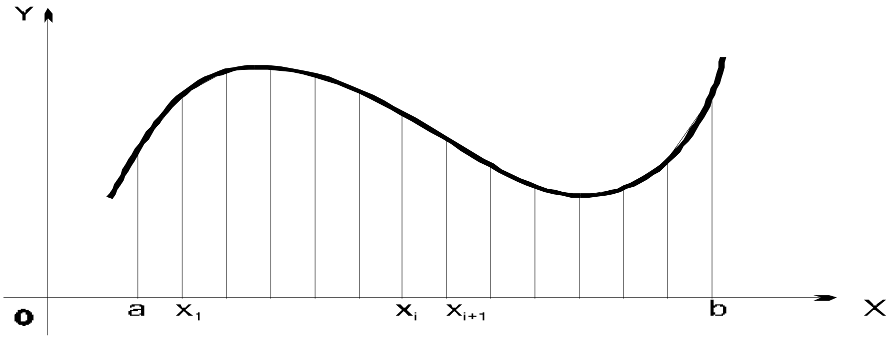
На практиці зазвичай беруть $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}$; якщо відповідну середню ординату $f(\xi_i) = f(x_{i+1/2})$ позначити через $y_{i+1/2}$, то формула перепишеться у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2}\right). \qquad (1)$$

Надалі, кажучи про формулу прямокутників, ми будемо мати на увазі якраз цю формулу.

Геометричні міркування природно приводять і до другої, наближеної формули, що часто використовується. Замінивши дану криву вписаною в неї ламаною, з вершинами у точках (x_i, y_i), де $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тоді наша криволінійна фігура заміниться іншою, яка складається із ряду трапецій (мал2.). Якщо, як і раніше рахувати, що проміжок $[a,b]$ розбитий на рівні частини, то площі цих трапецій будуть

$$\frac{b-a}{n}\frac{y_0+y_1}{2}, \frac{b-a}{n}\frac{y_1+y_2}{2}, \ldots, \frac{b-a}{n}\frac{y_{n-1}+y_n}{2}.$$



Додаючи, прийдемо до нової наближеної формули

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Це так звана формула трапецій.

Можна показати, що при зростанні n до нескінченності похибка формули прямокутників і формули трапецій нескінченно зменшується. Таким чином, при достатньо великому n обидві ці формули відтворюють шукане значення з довільним рівнем точності.

Формула Сімпсона

Якщо для кожної пари відрізків $[x_i, x_{i+2}]$ побудувати многочлен другого ступеня, потім про інтегрувати його і скористатися властивістю адитивності інтеграла, то одержимо формулу Сімпсона.

Розглянемо підінтегральну функцію $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_0 + 2h]$. Замінимо цю підінтегральну функцію інтерполяційним многочлен Лагранжа другого ступеня, що збігає з $f(x)$ у крапках $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$:

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Проінтегруємо: $\varphi(x)$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{f(x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}dx - \int_{x_0}^{x_2} \frac{f(x_1)((x-x_0)(x-x_2)}{h^2}dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{f(x_2)(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}dx$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2}\left[\frac{(x-x_1)^3}{3}\Big|_{x_0}^{x_0+2h} - \frac{h(x-x_1)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x_0+2h} \right] - \frac{f(x_1)}{h^2}\left[\frac{(x-x_0)^3}{3} - \Big|_{x_0}^{x_0+2h} - \frac{2h(x-x_0)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x+2h} \right] +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{2h^2}\left[\frac{(x-x_o)^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} - \frac{h(x-x_0)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x_0+2h} \right] = \frac{1}{h^2}\left[\frac{h^3 f(x_0)}{3} + \frac{4h^3 f(x_1)}{3} + \frac{h^3 f(x_2)}{3} \right] = \frac{h}{3}[f(x_0) +$$

$$+ 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Формула:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)\right]$$

і називається формулою Сімпсона.

Отримане для інтеграла $\int_{x_0}^{x_2} \varphi(x)dx$ значення збігається із площею криволінійної трапеції, обмеженою віссю x, прямими $x = x_0$, $x = x_2$ і параболою, що проходить через точки $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.

Лекція 16

Тема: Диферегнціальні рівняння. Основні поняття та означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

Мета: Вивчення поняття диференціального рівняння, розв'язання задачі Коші, диференціального рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, наочний, практичний

План:

1 Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

2 Основні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння.

3 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Креслярське приладдя, плакати, калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с 311-327.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.:К.-АСК,2001,с 421-430.

Теоретичні відомості

Тема: Основні поняття та означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними (термін «диференціальне рівняння» введений у 1576 р. Лейбніцем).

Диференціальне рівняння називається *звичайним,* якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням у частинних похідних,* якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

1. Диференціальні рівняння першого порядку

Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний вміст диференціального рівняння.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x,y,y') = 0, \qquad (1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1), нерозв'язне відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно $y^{1}{}'$, то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі.

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ або } -f(x,y)dx + dy = 0$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, дістанемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (3)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — відомі функції. Рівняння (3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду .(1), (2) і (3):

$xy' + y^2 - 1 = 0$; $-y' = 2x - y$; $(x - 3y)dx + xydy = 0$.

Знаходження невідомої функції, що входить в деференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме непорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».).

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дає така теорема Коші [26].

Теорема 1 (про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0; y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0) = y_0. \qquad (4)$$

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

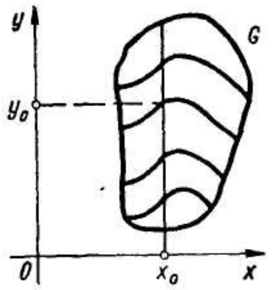


Рис. 8.1

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0; y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи при цьому з області *G*, то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (2) має безліч різних розв'язків (рис. 8.1).

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y=\varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) — y_0. \qquad (5)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається *задачею Коші.* З погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, $f(x, y)$ або $f'_y(x, y)$ *в* цих точках розривні), називаються *особливими.* Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком.*

Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою.* Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної.

Нехай задано рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (6)$$

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Нехай права частина диференціального рівняння (*2*) задовольняє в області *G* умови теореми Коші.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу *x* і довільної сталої *C*, називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області *G*, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0; y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_o$, що функція $y = \varphi(x, C_o)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_o) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y = \varphi(x, C_o)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_o$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_o) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом рівняння.*

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y). \qquad (7)$$

де $y(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y) f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\, dx - (y + yx^2)\, dy = 0.$$

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \text{ або } \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$\ln(1+x^2) = \ln(1+y^2) + \ln|C|$, $C \neq 0$. Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \quad C \neq 0$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2y)\,dy = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2y^2 \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx + \int\frac{y+1}{y^2}dy = C, \quad C \in R,$$

або

$$\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

звідки

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax+by+c), \qquad (10)$$

де a, b, c — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \qquad (11)$$

рівняння (10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, диференціюючи рівність (11) по x, дістанемо $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, тому згідно з (10) маємо рівняння $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a+bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a+bf(u)} = dx$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax + by + c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (10).

Якщо $a + bf(x) = 0$, або, що те ж саме, $\frac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (11), рівняння (10) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Лекція 17

Тема: Лінійні і однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Мета: Вивчення методів розв`язування лінійних однорідних диференціальнних рівнянь першого порядку

Метод: словесний , практичний

План

1 Означення

2 Методи Бернуллі і Лагранжа

3 Рівняння Я. Бернуллі

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 432-438.

1 Означення

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)\cdot y = g(x), \qquad (2.11)$$

де р(х) і д(х) — задані функції, зокрема — постійні.

Особливість ДР (2.11): шукана функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, і не перемножуючи між собою.

Розглянемо два методи інтегрування ДР (2.11) — метод И Бернуллі і метод Лагранжа.

2 Метод И. Бернуллі

Розв'язок рівняння (2.11) шукається у виді добутку двох інших

функцій, тобто за допомогою підстановки у =и v, де и =и(х) і v = v(x) — невідомі функції від х, причому одна з них довільна (але не дорівнює нулю дійсно будь-яку функцію у(х) можна записати як $y(\chi) = \frac{y(\chi)}{v(\chi)}\cdot v(\chi) = \upsilon(\chi)\cdot v(\chi)$,

де $v(\chi)\neq 0$. Тоді $y' = u'\cdot v + v\cdot u'$. Підставляючи y', y у рівняння (2.11), одержуємо: $u'\cdot v + u\cdot v' + p(x)\cdot u\cdot v = g(x)$ або

$$u'\cdot v + u'\cdot(v' + (x)\cdot v) = g(x). \qquad (2.12)$$

Підберемо функцію v = v(x) так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто розв'яжемо ДР $v' + p(x)\cdot v = 0$. Отже, $\frac{dv}{dx} + p(x)\cdot v = 0$, тобто $\frac{dv}{v} = - p(x)\cdot dx$.

Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|v| = -\int p(x)\cdot dx + \ln|c|.$$

Через довільність вибору функції v(x), можна прийняти с = 1. Звідси

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію v у рівняння (2.12), одержуємо

$u' \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x)$. Отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x), \quad du = g(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \cdot dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \cdot dx + c$$

Повертаючись до змінної y, одержуємо розв'язок

$$y = v \cdot u = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \cdot dx + c\right) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} \tag{2.13}$$

вихідного ДР (2.11).

Приклад 2.8. Проінтегрувати рівняння $y' + 2xy = 2x$

Розв'язок: Покладемо y = uv. Тоді u'v + uv' + 2xuv = 2x, тобто u'v+ u(u' + 2xv) = 2x. Спочатку розв'язуємо рівняння

v' + 2xv =0:

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x2}, du = \int 2x \cdot e^{x2} \cdot dx, u = e^{x2} + c.$$

Тепер розв'язуємо рівняння $u' \cdot e^{-x2} + u \cdot 0 = 2x$ тобто

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x2}, du = \int 2x \cdot e^{x2} \cdot dx, u = e^{x2} + c.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння $y = u \cdot v = (e^{x2} + c) \cdot e^{-x2}$,

тобто $y = 1 + c \cdot e^{-x2}$. •

Метод Лагранжа (метод варіації довільної постійної)

Рівняння (2.11) інтегрується у такий спосіб.

Розглянемо відповідне рівняння без правої частини, тобто рівняння y' + p(x)y = 0. Воно називається лінійним однорідним ДР першого порядку. У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx \;.\; \ln|y| = -\int p(x) \cdot dx = \ln|c_1|$$

Таким чином, $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)\,dx}$, тобто

$y = \pm c_{1e}^{-\int p(x)\,dx}$, тобто $y = \pm c_{1e}^{-\int p(x)\,dx}$ або $y = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$, де $c = \pm c_1$

Метод варіації довільної сталої полягає у тому, що сталу c в отриманому розв'язку заміняємо функцією c(x), тобто c = c(x). Розв'язок рівняння (2.11) шукаємо у вигляді

$$y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} \tag{2.14}$$

Знаходимо похідну (для зручності запису користуємося позначенням $e^{f(x)} = \exp(F(x))$:

$$y' = c'(x)\exp(-\int p(x) \cdot dx) + c(x)\exp(-\int p(x) \cdot dx) \cdot (-p(x)).$$

Підставляємо значення y и y' у рівняння (2.11):

$$c'(x)\exp(-\int p(x) \cdot dx) - c(x) \cdot p(x)\exp(-\int p(x) \cdot dx + c(x) \cdot p(x)\exp(-\int p(x) \cdot dx) = g(x)$$

Другий і третій доданки взаємно знищуються, і рівняння прийме вигляд

$$c'(x)\exp(-\int p(x) \cdot dx) = g(x).$$

Отже, .

$$dc(x) = g(x)\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$c(x) = \int g(x)\cdot\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx + c$$

Підставляючи вираз c(x) у рівність (2.14), одержимо загальний розв'язок ДР (2.11):

$$y = \left| \int g(x)\cdot\exp(\int p(x)\cdot dx)\cdot dx + c \right| \cdot \exp(-\int p(x)\cdot dx).$$

Природно, та ж формула була отримана методом Бернуллі (порівн. з (2.13)).

Приклад 2.9. Розв'язати приклад 2.8 методом Лагранжа.

Розв'язання: Розв'язуємо рівняння $y' + 2xy = 0$. Маємо $\frac{dy}{y} = -2\cdot dx$, або $y = c\cdot e^{-x2}$.

Заміняємо c на c(x), тобто розв'язок ДР $y' + 2xy = 2x$ шукаємо у виді $y = c(x)\cdot e^{-x2}$. Маємо

$$y' = c'(x)\cdot e^{-x2} + c(x)\cdot e^{-x2}\cdot(-2x).$$

Тоді

$c'(x)\cdot e^{-x2} - 2xc(x)\cdot e^{-x2} + 2xc(x)\cdot e^{-x2} = 2x$,тобто $c'(x)\cdot e^{-x2} = 2x$, або $c(x) = \int 2x\cdot e^{x2}dx$,або $c(x) = e^{x2} + c$.

Тому $y = (e^{x2} + c)\cdot e^{-x2}$,або $y = 1 + c\cdot e^{-x2}$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Зауваження. Рівняння виду $(x - P(y) + Q(y)) - y' = R(y)$, де $P(y), Q(y), R(y) \neq 0$ — задані функції, можна звести до лінійного, якщо x вважати функцією, а

y — аргументом: x = x(y). Тоді, користуючись рівністю $y'_x = \frac{1}{x'_y}$,одержуємо $\frac{x\cdot P(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$,тобто лінійне відносно x рівняння. Його розв'язок шукаємо у виді x = u v, де u = u(y), v =v(y) — дві невідомі функції.

Приклад 2.10. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x + y)y' = 1$.

Розв'язок: З огляду що $y' = \frac{1}{x'}$, від вихідного рівняння переходимо до лінійного рівняння $x' = x + y$.

Застосуємо підстановку x = uv. Тоді $x' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Одержуємо: $u'\cdot v + u\cdot v' = u\cdot v + y$, або $u'\cdot v + (v' - v) + y$.

Знаходимо функцію $v: v' - v = 0$, $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$.

Знаходимо функцію $u: u'\cdot e^y + u\cdot 0 = y$, тобто $u' = y\cdot e^{-y}$, або $u = \int y\cdot e^{-y}\cdot dy$.

Інтегруючи по частинах, знаходимо: $u = -y\cdot e^{-y} - e^{-y} + c$. Значить загальний розв'язок даного рівняння:

$x = u\cdot v = (-y\cdot e^{-y} - e^{-y} + c)\cdot e^y$, або $x = -y - 1 + c\cdot e^y$.

3 Рівняння Я. Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n, n \in R, n \neq 0, n \neq 1 \qquad (2.15)$$

називається рівнянням Бернуллі. Покажемо, що його можна привести до лінійного.

Якщо n=0, то ДР (2.15) — лінійне, а при n=1 — з відокремлюваними змінними. У загальному випадку, розділивши рівняння (2.15) на $y^n \neq 0$, одержимо:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x). \qquad (2.16)$$

Позначимо $y^{-n+1} = z$. Тоді $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Звідси знаходимо $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Рівняння (2.16) приймає вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок його відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння (2.15) до лінійного. На практиці ДР (2.15) зручніше шукати методом И. Бернуллі у виді $y = u \cdot v$ (не зводячи його до лінійного).

Лекція 18

Тема Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Мета: Ввести поняття диференціальних рівнянь вищих порядків, розглянути алгоритм розв`язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі талими коефіцієнтами

Метод: словесний , практичний

План

1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 470-472

Лінійні однорідні ДР другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (3.13)$$

і встановимо деякі властивості його розв’язків .

Теорема 1. *Якщо функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними розв'язками рівняння (3.13), то розв'язком цього рівняння є також функція*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (3.14)$$

де c_1 і c_2 — довільні постійні.

Підставимо функцію $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ і її похідні в ліву частину ЛОДРУ(3.13). Одержуємо

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1(x)\cdot(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2(x)\cdot(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(x)\cdot(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(x)\cdot(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$c_1(y_1'' + a_1(x)\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y) + c_2(y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2) = c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0$$

тому що функції y_1 і y_2 — розв'язки рівняння (3.13) і, виходить, вираз в дужках тотожно дорівнюють нулю.

Таким чином, функція $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ також є розв'язком рівняння (3.13).

З теореми 3.2, як наслідок, випливає, що якщо y_1 і y_2 — розв'язки рівняння (3.13), то розв'язки його будуть також функції $y = y_1 + y_2$ і $y = c\cdot y_1$.

Функція (3.14) містить дві довільні постійні і є розв'язком рівняння (3.13). Чи може вона бути загальним розв'язком рівняння (3.13)?

Для відповіді на питання введемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на інтервалі (a;b), якщо рівність

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0, \qquad (3.15)$$

де a_1, $a_2 \in R$, виконується тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = 0$.

Якщо хоча б одне з чисел a_1 або a_2 відмінне від нуля і виконується рівність (3.15), то функції y_1 і y_2 називаються лінійно залежними на (a;b).

Очевидно, що функції y_1 і y_2 лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто для всіх $x \in (a,b)$ виконується рівність $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, або $y_1 = \lambda_{y_2}, \lambda = const$.

Наприклад, функції $y_1 = 3e^x$ і $y_2 = e^x$ лінійно залежні: $\frac{y_1}{y_2} = 3 = const$ функції y_1 і $y_3 = e^{2x}$ — лінійно незалежні: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq const$; функції $y_4 = \sin x$ і $y_5 = \cos x$ є лінійно незалежними: рівність $a_1 \sin x + a_2 \cos x = 0$ виконується для всіх $x \in R$ лише при $a_1 = a_2 = 0$ (або $\frac{y_4}{y_5} = tgx \neq const$).

Засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є так званий визначник Вронського або вронськіан (Ю. Вронський — польський математик).

Для двох диференційованих функцій $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ вронскіан має вигляд

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Мають місце наступні теореми.

Теорема 2. *Якщо диференційовані функції* $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *лінійно залежні на* (a,b)*, то визначник Вронського на цьому інтервалі тотожно дорівнює нулеві.*

Тому ,що функції y_1 і y_2 лінійно залежні, то в рівності (3.15) значення a_1 або a_2 відмінне від нуля. Нехай $a_1\neq 0$, тоді $y_1=-\frac{a_2}{a_1}y_2$ тому для будь-якого $x\in(a,b)$

$$W(x)=\begin{vmatrix} -\frac{a_2}{a_1}y_2 & y_2 \\ -\frac{a_2}{a_1}y_2' & y_2' \end{vmatrix}=0$$

Теорема 3. *Якщо функції* $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *— лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.13) на* (a,b) *, то визначник Вронського на цьому інтервалі ніде не перетворюється в нуль.*

Доведення теореми опустимо.

З теорем 3.3 і 3.4 випливає, що вронськіан не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу (a,b) тоді і тільки тоді, коли частки розв'язків лінійно незалежні.

Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі (a,b) частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ЛОДУ другого порядку визначає фундаментальну систему розв'язків цього рівняння: будь-який довільний розв'язок може бути отриманий як комбінація $y=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$.

Приклад 1. Частинні розв'язки $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x, y_3=2\sin x$ і $y_4=5\cos x$ (їх безліч!) рівняння y'' + y = 0 утворюють фундаментальну систему рішень; розв'язки ж $y_5=0$ і $y_6=\cos x$ — не утворюють.

Тепер можна сказати, при яких умовах функція (3.14) буде загальним розв'язком рівняння (3.13).

Теорема 3.5 *(структура загального розв'язок ЛОДРу другого порядку). Якщо два частинні розв'язки* $y_1=y_1(x)$ *і* $y_2=y_2(x)$ *ЛОДРу (3.13) утворять на інтервалі* (a,b) *фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція*

$$y=c_1y_1+c_2y_2 \qquad (3.16)$$

де c_1 *і* c_2 *— довільні сталі.*

Відповідно до теореми 3.2, функція (3.16) є розв'язком рівняння (3.13). Залишається довести, що це розв'язок загальний, тобто що з нього можна виділити єдиний частинний розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам

$$y|_{x=x0} = y_0, y'|_{x=x0} = y_0' \tag{3.17}$$

де $x_0 \in (a,b)$.

Підставивши початкові умови (3.17) у розв'язок (3.14), одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \\ y_0' = c_1' y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0), \end{cases}$$

де $y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0)$, з невідомими c_1 і c_2. Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

дорівнює значенню вронскіана W(x) при $x = x_0$.

Тому що розв'язок $y_1(x)$ й $y_2(x)$ утворять фундаментальну систему розв'язків на (a,b) і $x_0 \in (a;b)$, то, відповідно до теореми 3.4, $W(x_0) \neq 0$. Тому система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$c_1 = c_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}, \qquad c_2 = c_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}$$

Розв'язок $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ є частинним розв'язком (єдиним, у силу теореми єдиності) рівняння (3.13), що задовольняють початковим умовам (3.17). Теорема доведена.

Приклад 2. На підставі теореми 3.5 загальним розв'язком рівняння $y'' + y = 0$ (див. приклад 3.4) є функція $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Лекція 19

Тема: Числові ряди. Основні поняття та означення. Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.

Мета: Вивчення основних понять та означень про числові ряди, ознак збіжності числових рядів. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Числові ряди. Основні поняття та означення.

2 Операції над рядами.

3 Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с. 396-419.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.:К.-АСК,2001,с 493-507.

Теоретичні відомості

1. Числові ряди

Числовим рядом називається вираз

$$\boxed{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n} \qquad (1)$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – члени числового ряду, u_n – загальний член ряду.

Сума n перших членів ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S_n$ називається n***-ю частинною сумою ряду***.

Якщо існує скінченна границя

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = S,} \qquad (2)$$

то числовий ряд (1) називається ***збіжним***, а число S називається ***сумою ряду*** (1). Якщо границя (2) не існує, то ряд (1) називається ***розбіжним***. Такий ряд суми не має.

Різницю між сумою ряду S та його n-ю частинною сумою S_n називають n***-м залишком*** збіжного ряду (1). Залишок ряду позначається через r_n :

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots \qquad (3)$$

Суму S збіжного ряду (1) можна представити у вигляді:

$$S = S_n + r_n = \left(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n\right) + \left(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\right).$$

<u>Приклад 1</u>. Скориставшись означенням суми числового ряду, обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо частинні суми ряду:

$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}$,

$S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$,

$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = S_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}$, ...

Запишемо послідовність частинних сум: $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{2}{5}$, $S_3 = \frac{3}{7}$, $S_4 = \frac{4}{9}$, ... Загальний член цієї послідовності $S_n = \frac{n}{2n+1}$. За означенням, сума ряду $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

Отже, послідовність частинних сум має границю, яка дорівнює $\frac{1}{2}$. Таким чином, заданий ряд збігається і його сума $S = \frac{1}{2}$.

<u>Властивості числових рядів</u>:

1) Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і його сума дорівнює S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також збіжний і його сума дорівнює $\tilde{N}S$ $(\tilde{N} = const)$. Якщо ж ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається і $C \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також розбігається.

2) Якщо числові ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і S_u та S_v – їхні суми відповідно, то збіжні також ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і їхні суми дорівнюють $S_u \pm S_v$ відповідно.

Необхідна умова збіжності ряду.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достатня умова розбіжності ряду.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$6 + \frac{9}{10} + \frac{14}{25} + \ldots + \frac{n^2+5}{3n^2-2} + \ldots$$

Розв'язання. Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Необхідна умова збіжності не виконується, заданий ряд розбіжний.

Зауваження. Якщо необхідна умова виконується, то висновок про збіжність або розбіжність ряду *тільки на основі цього факту* зробити ***не можна***.

Приклад 3. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності числового

ряду $$\frac{6}{11} + \frac{7}{41} + \frac{8}{91} + \ldots + \frac{n+5}{10n^2+1} + \ldots$$

Розв'язання. Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{10n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{10+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{10} = 0.$$

Тут виконується необхідна умова збіжності числового ряду, проте вона не є достатньою для того, щоб зробити висновок про збіжність або розбіжність досліджуваного ряду.

Існують ***достатні ознаки*** збіжності, які дають можливість з'ясувати питання про поведінку ряду.

***Ознака Даламбера*.**

Якщо для ряду з додатними членами $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то: 1) при $\rho < 1$ ряд *збіжний*,

2) при $\rho > 1$ ряд *розбіжний*.

При $\rho = 1$ слід застосовувати іншу ознаку.

Зауваження. Ознаку Даламбера доцільно застосовувати до рядів, загальні члени яких містять показникові множники або факторіали.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{5} + \frac{9}{25} + \frac{16}{125} + ... + \frac{(n+1)^2}{5^n} + ...$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера.

За умовою маємо $u_n = \frac{(n+1)^2}{5^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{5^{n+1}}$.

Обчислимо

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)^2}{5^{n+1}} : \frac{(n+1)^2}{5^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2 \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} < 1.$$ За ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + ... + \frac{4^n}{n!} + ...$$

Розв'язання. Запишемо n–й та $(n+1)$–й члени заданого ряду

$$u_n = \frac{4^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зауваження. $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ (в математиці «!» – знак факторіалу).
$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n+1) = n!(n+1)$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{4^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 4\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 4^n}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{(n+1)}=0<1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

<u>Приклад 6</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$1+\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{8}{\sqrt{10}}+\ldots+\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}+\ldots$$

Розв'язання. Оскільки для заданого ряду

$$u_n=\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+4}},\text{ то}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n}{2^n}\cdot\sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}}=2>1.$$

Отже, $\rho=2>1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *розбіжний*.

<u>Ознака порівняння рядів</u> (гранична).

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ – знакододатні ряди $(u_n>0,\ v_n>0)$.

Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$, $(k\neq 0$, $k\neq\infty)$, то *поведінка рядів однакова*: якщо один з рядів збіжний (розбіжний), то і другий ряд також збіжний (розбіжний).

Зауваження. Для застосування цієї ознаки заданий ряд слушно порівнювати з рядом, збіжність (чи розбіжність) якого відома заздалегідь.

Зокрема, це такі ряди:

- ***геометричний ряд*** (*сума членів нескінченної геометричної прогресії*)

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\ - \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \text{çá³æ í èé ï ðè } |q| < 1; \\ \text{ðî çá³æ í èé ï ðè } |q| \geq 1; \end{cases}$$

- гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - } \textit{розбіжний}; \qquad (5)$$

- ***узагальнений гармонічний ряд***

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ - } \qquad (6)$$

$$\begin{cases} \text{çá³æ í èé ï ðè } \alpha > 1; \\ \text{ðî çá³æ í èé ï ðè } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

<u>Приклад 7</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{26} + \frac{4}{83} + \ldots + \frac{n+1}{3n^3+2} + \ldots$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку порівняння рядів. Запишемо загальний член заданого ряду $u_n = \dfrac{n+1}{3n^3+2}$. Для порівняння оберемо ряд із загальним членом $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ (який отримали, залишивши в чисельнику і знаменнику виразу для u_n тільки старші степені змінної n: $v_n = \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – *збіжний* узагальнений гармонічний ряд, оскільки $\alpha = 2 > 1$. Маємо

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n^3+2} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n^2}{3n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{3n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

.

Оскільки границя $k = \dfrac{1}{3}$ скінченна і $k \neq 0$, то ряди ведуть себе однаково, тобто заданий ряд *збіжний,* як і ряд, обраний для порівняння.

<u>Приклад 8</u>. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$.

Розв'язання. Запишемо загальний член заданого ряду $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$. Для порівняння оберемо ряд із загальним членом $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ – *розбіжний* узагальнений гармонічний ряд, оскільки $\alpha=\frac{1}{2}<1$. Обчислимо $k=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}{3n+1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки границя $k=\frac{1}{3}$ скінченна і $k\neq 0$, то ряди ведуть себе однаково, тобто заданий ряд *розбіжний*, як і ряд, обраний для порівняння.

Лекція 20

Тема: Знакозмінні ряди, функціональні ряди
Мета: Вивчити особливості дослідження н збіжність знакозмінних і функціональних рядів

Метод: словесний , практичний

План

1 Знакозмінні ряди

2 Функціональні ряди

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 508-512

1. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Знакопочерговим рядом називається ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (1)$$

де $u_n > 0$ для $n \in N$ (тобто ряд, додатні і від'ємні члени, якого стоять один за одним по черзі).

Достатня ознака збіжності

Теорема.1 (ознака Лейбніца). *Знакопочерговий ряд (.1) збігається, якщо:*

1 Послідовність абсолютних величин членів ряду монотонно спадає, тобто $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$;

2 Загальний член ряду прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. *При цьому сума* S *ряду (3.1) задовольняє нерівностям*

$$0 < S < u_1 \qquad (2).$$

Зауваження:

1. Дослідження знакопочергового ряду вигляду

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \qquad (3)$$

(з від'ємним першим членом) зводиться шляхом множення всіх його членів на (-1) до дослідження ряду (1).

2. Співвідношення (.2) дозволяє отримати просту і зручну оцінку помилки, яку ми допускаємо, замінюючи суму S даного ряду його частинною сумою S_n. Відкинутий ряд (остача) є також знакопочерговим рядом $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$, сума якого по модулю менша першого члена цього ряду, тобто $S_n < u_{n+1}$. Тому помилка менша модуля першого з відкинутих членів.

Приклад 1. Обчислити приблизно суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}$.

Він збігається. Можна записати: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \ldots = S.$ замінивши S на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$$

зробимо помилку, меншу, ніж $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003.$ Отже, $S \approx 0{,}7834.$ ●

2 Знакозмінні ряди.

Знакопочерговий ряд є окремим випадком знакозмінного ряду. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну множину додатніх і нескінченну множину від'ємних членів, називається ***знакозмінними.***

Для знакозмінних рядів має місце наступна загальна достатня ознака збіжності.

Теорема 14.3.2. *Нехай даний знакозмінний ряд* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *(3.4)*

Якщо збігається ряд $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$ *(3.5)*

складений з модулів членів даного ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд(4).

●

3. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних рядів рядів.

Знакозмінний ряд називається ***тим, що абсолютно збігається,*** якщо ряд, складений з модулів його членів, збігається.

Знакозмінний ряд називається ***тим, що умовно збігається****,* якщо сам він збігається, а ряд, складений з модулів його членів, розбіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

○ Це знакопочерговий ряд збігається. Однак ряд, складений з модулів членів даного ряду, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$ розбіжний (гармонійний ряд)..

3 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}.$ абсолютно збігається, оскільки ряд, складений з модулів його членів, збігається

Ряди, що абсолютно збігаються, додаються, віднімаються, перемножуються як звичайні ряди. Суми таких рядів не залежать від порядку запису членів.

Тому дії над рядами не можна виконувати, не переконавшись в їх абсолютній збіжності.

Для встановлення абсолютної збіжності використовують всі ознаки збіжності знакопозитивних рядів, замінюючи усюди загальний член ряду його модулем.

2 Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції від x, називається ***функціональним:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x_1)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\ldots \qquad (4.1).$$

Надаючи x певне значення x_0, ми одержимо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\ldots,$$

Якщо одержаний числовий ряд сходиться, то точка x_0 називається ***точкою збіжності ряду*** (4.1); якщо ж ряд розходиться – ***точкою розбіжності функціонального ряду***. Сукупність числових значень аргументу x, при яких функціональний ряд сходиться, називається його ***областю збіжності***. В області збіжності функціонального ряду його сума є деякою функцією від x: $S=S(x)$. Визначається вона в області збіжності рівністю

$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ - часткова сума ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

○ Даний ряд є рядом геометричної прогресії зі значенням $q=x$. Отже, цей ряд сходиться при $|x|<1$, тобто при всіх $x\in(-1;1)$; сума ряду рівна $\frac{1}{1-x}$: $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, при $|x|<1$. ●

Степеневий ряд

степеневий ряд ряд, членами якого є степеневі функції аргументу x,***:***

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (4.3)$$

Дійсні (або комплексні) числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ називаються ***коефіцієнтами ряду*** (4.3) $x\in R$ - дійсна змінна.

З'ясуємо питання про збіжність степеневого ряду (4.3). Область збіжності степеневого ряду (4.3) містить принаймні одну точку $x=0$ (ряд (4.4) сходиться в точці $x=x_0$).

Теорема 14.5.1 (Абеля). *Якщо степеневий ряд (4.3) сходиться при* $x=x_0\neq 0$, *то він абсолютно сходиться при всіх значеннях x, що задовольняють нерівності*

$y|x|<y|x_0|.$

Наслідок 14.5.1. *Якщо ряд (4.3) розходиться при* $x=x_1$, *то він розходиться і при всіх x, що задовольняють нерівності* $|x|>|x_1|$.

Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду

З теореми Абеля виходить, що якщо $x_0\neq 0$ є точка збіжності степеневого ряду, то інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь складається з точок збіжності даного ряду; при всіх значеннях x поза цим інтервалу ряд (4.3) розходиться.

Рис . 2

Інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ називають ***інтервалом збіжності степеневого ряду***. Поклавши, що $|x_0| = R$, інтервал збіжності можна записати у вигляді $(-R;R)$. Число R називають ***радіусом збіжності степеневого ряду***, тобто

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ Аналогічно, ознакою Коші $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Зауваження:

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можна переконатися, що ряд (4.3) абсолютно сходиться на всій числовій осі. В цьому випадку $R = \infty$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то R=0 . Інтервал збіжності степеневого ряду (4.4), що шукається з нерівності $|x - x_0| < R$; має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Якщо степеневий ряд містить не всі степені *x*, тобто заданий неповний степеневий ряд, то інтервал збіжності ряду знаходять без визначення радіусу збіжності (формули (5.1) і (5.2)), а безпосередньо застосовуючи ознаку Даламбера (або Коші) для ряду, складеного з модулів членів даного ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

○ Скористаємося формулою (5.1):

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1!)}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$. Отже, даний ряд абсолютно сходиться на всій числовій осі. ●

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$

○ Заданий ряд неповний. Скориставшись ознакою Даламбера для даного ряду, маємо: $|u_n| = \dfrac{|x^{2n-1}|}{2n-1}$, $|u_{n+1}| = \dfrac{|x^{2n+1}|}{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|} = |x^2|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1} = x^2$.

Ряд абсолютно сходиться, якщо $x_2 < 1$ або $-1 < x < 1$. Дослідемо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = -1$ маємо ряд $-1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \cdots$, який сходиться за ознакою Лейбніца. При $x = 1$ маємо ряд $+1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ - цей ряд теж сходиться за ознакою Лейбніца. Отже, областю збіжності початкового ряду є відрізок [-1;1]. ●

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

○ Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою (5.1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=2.$$

Отже, ряд сходиться при $-2 < x + 2 < 2$, тобто при $-4 < x < 0$. При $x = -4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, який сходиться за ознакою Лейбніца. При $x = 0$ маємо ряд, що розходиться $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Отже, областю збіжності початкового ряду є піввідрізок [- 4;0)

Лекція 21

Тема: Випадкові події. Імовірність випадкової події. Операції над подіями

Мета: вивчення понять випадкової величини, імовірність випадкової величини, перестановки, розміщення, комбінації; операцій дій над подіями. Розвиток логічного мислення, уваги, пам´яті, уявлення.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Випадкові події.
2 Види випадкових подій.
3 Імовірність випадкової події.
4 Операції над події: імовірність суми, імовірність добутку.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С. 370-379.

Теоретичні відомості:

Тема: Випадкові події. Імовірність випадкової події. Операції над подіями

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVII століття. Тоді були дуже поширені азартні ігри, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку. До таких ігор належать ігри з кубиками, гра в «орлянку», деякі карточні ігри. Б. Паскаль і П. Ферма в листуванні з приводу задач, які виникли в зв'язку з азартними іграми, запровадили поняття ймовірності. Для розв'язання таких задач існуючий тоді математичний апарат виявився недостатнім, і було закладено основи нової науки. Нині теорія ймовірностей широко застосовується в фізиці і в біології, у техніці, в різних галузях народного господарства.

Первісним поняттям теорії ймовірності є поняття події.

Подія — це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: А, *В, С*... Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (експерименту, досліду).

Випробування — це умови, в результаті яких відбувається (чи не відбувається) подія.

Наприклад, випробування — підкидання монети, події: А — «поява герба», *B* — «поява цифри»; випробування — підкидання кубика, події: А — «поява 1 очка», *B* — «поява 2 очок», *C* — «поява 3 очок», *D* — «поява 4 очок», *E* — «поява 5 очок»,*G* — «поява 6 очок».

Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Наприклад: під час витягування навмання однієї карти з колоди ви взяли короля. Подія А — «взято короля» є випадковою.

Випадкові події можуть бути масовими та одиничними.

Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені (можна спостерігати) необмежену кількість разів.

Наприклад, влучення або промах в серії пострілів; поява бракованих деталей при серійному випуску; радіоактивний розпад атомів речовин і т. д.

Прикладом одиничної випадкової події є падіння Тунгуського метеорита.

Теорія ймовірностей вивчає лише масові випадкові величини.

Вірогідною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика натурального числа, меншого за 7» — є вірогідною.

Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика цифри 7».

Виконання вправ

Повна група подій, попарно несумісні події, рівноможливі події, елементарні події.

Повною групою подій називається множина подій таких, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із них.

Попарно несумісні події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Наприклад, попадання і промах при одному пострілі — це дві несумісні події; поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одному киданні грального кубика — це шість несумісних подій.

Рівноможливі події — це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Наприклад, поява цифр 1, 2, 3,4, 5, 6 при киданні грального кубика — рівноможливі події.

Якщо події:

1) утворюють повну групу подій;

2) є несумісними;

3) є рівноможливими, то такі події утворюють *простір елементарних подій.*

У теорії імовірностей розрізняють **прості** й **складені** події. Наприклад, під час кидання двох костей у сумі випало 2 очки. Це **проста** подія.

Подія називається ***складеною,*** *якщо поява її залежить від появи інших, простих подій.*

Наприклад, під час кидання двох гральних кубиків у сумі випало 10 очок. Ця подія є складеною, бо вона може складатися з трьох простих подій:

- на першому кубику випало 4, а на другому — 6 очок;
- на першому і на другому кубиках випало по 5 очок;
- на першому кубику випало 6, а на другому — 4 очки.

Обчислювати імовірності складених подій за формулою Р(А) = ~ буває складно, а інколи й неможливо. їх імовірності обчислюють через імовірності простих подій, з яких утворюються складені. Таке обчислення спирається на застосування так званих теорем додавання і множення несумісних однаково можливих подій, які утворюють повну групу.

Введемо спочатку поняття про суму подій. Це поняття аналогічне поняттю суми чисел.

Сумою подій А і *В* ***називається подія*** *С,* ***яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події А, або події*** *В,* ***або обох разом.***

Суму **двох подій позначають С = А + В.**

Приклад. Подія А — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ -подія, яка означає влучення в ціль взагалі (не має значення з якого — першого, другого або обох пострілів).

Сумою ***С*** *двох несумісних подій* ***А і В є*** *подія, яка полягає у здійсненні або події А, або події* ***В.*** *Одночасна поява подій А і В виключена.*

<u>Теорема (теорема додавання).</u>

Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Теорему додавання застосовують для розв'язування тих задач, в яких ідеться про появу або події A_1, або події A_2, ..., або події $\mathbf{A_n}$.

З теореми додавання випливають два наслідки. Наслідок 1. Сума імовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.

$P(A_1 + A_2 + ... + \mathbf{A_n}) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(\mathbf{A_n}) = 1.$

Перш ніж формулювати другий наслідок з теореми додавання, введемо означення протилежних подій.

Дві події називаються *протилежними*, якщо одна і лише одна з них обов'язково здійсниться в даному випробуванні.

Наприклад, влучення і промах під час одного пострілу, безвідмовна робота всіх елементів технічної системи і вихід з ладу одного з них.

Якщо А — деяка подія, то протилежна їй позначається А .

Події А і А утворюють повну групу несумісних подій.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$\mathbf{P(A) + P(A) = 1}\ .$$

У задачах на обчислення імовірностей інколи зручно обчислювати шукану імовірність події А через імовірність протилежної події за формулою

$P(A) = 1 - P(A)$.

Теорема множення імовірностей

Введемо спочатку поняття добутку подій.

***Добутком двох подій* А *і* В *називається подія С, що полягає у здійсненні під час одиничного випробування і події* А, *і події* В.**

$$\mathbf{C = AB}$$

Добутком двох подій А і ***В*** *називається подія АВ, яка полягає у сумісній появі цих подій.*

Для добутку n подій використовуються позначення $C = A_1A_2 \ldots A_n$

Лекція 22

Тема: Елементи комбінаторики

Мета: ознайомитись основними поняттями теорії ймовірностей і елементами комбінаторики .Розвивати логічне мислення, самостійність

Метод: словесний, практичний

План

1 Теорія ймовірностей , основні поняття
2 Перестановки , розміщення, комбінації
3 Розв язавання вправ

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.- С. 362- 366.

Означення. **Розміщенням** з m елементів по n називаються такі сполуки, з яких кожна містить n елементів, узятих із даних m елементів і таких, що відрізняються одна від одної або елементами, або порядком елементів.

Приклад

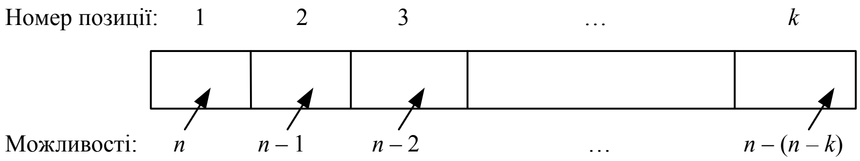
Нехай число предметів, з яких ми складаємо різні сполуки, дорівнює 3. Позначимо їх a, b, c. З них можна скласти такі сполуки:
по одному елементу: a, b, c;
по два: ab, ac, ba, bc, ca, cb;
по три: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Число всіх можливих розміщень з m елементів по n дорівнює добуткові n послідовних цілих чисел, з яких найбільше m. Позначаємо так A_m^n; A — перша літера французького слова «arrangement», що означає «розміщення». Тоді

$$\boxed{A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)] = \frac{m!}{(m-n)!}.} \qquad (6)$$

$n!$ (читаємо: n факторіал), $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Ілюстрація. Розглянемо n елементів, які можна розмістити на k позиціях.



Приклад

$$A_4^2 = 4(4-1) = 4 \cdot 3 = 12;$$
$$A_8^4 = 8(8-1)(8-2)(8-3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

Задача

На першому курсі студенти мають 10 навчальних предметів і 5 різних занять на день. Скількома способами можна скласти відповідний розклад?

• Усі можливі набори предметів становлять усі можливі розміщення з 10 елементів по 5. Отже, усіх таких способів існує

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\ 240. \bullet$$

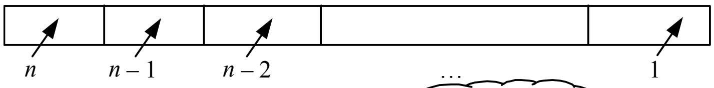
ПЕРЕСТАВЛЕННЯ

Означення. Розміщення з m елементів, узятих по m, тобто розміщення, які різняться лише порядком елементів, називаються **переставленнями**.

Число всіх можливих переставлень із m елементів позначається P_m (P — початкова літера французького слова «permutation» — переставлення)

$$\boxed{P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\cdots 1 = m!} \qquad (7)$$

Ілюстрація. Нехай маємо n елементів та n позицій.



Вважають за означенням: 0! = 1

Задача Скільки дев’ятицифрових чисел можна записати різними значущими цифрами?

• $P_9 = 9! = 362\ 880$. •

Задача Скількома способами можна розмістити 12 осіб за столом, на якому поставлено 12 предметів?

• $P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$. •

КОМБІНАЦІЇ

Означення. Розміщення з m різних елементів по n у кожній групі, де порядок елементів неістотний, називається **комбінацією із *m* елементів по *n***.

Число всіх можливих сполучень (комбінацій) з m елементів по n позначається C_m^n (C — початкова літера латинського слова «combinare» — з’єднувати).

$$C_m^n = C_m^{m-n};$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \equiv \binom{m}{n};$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n};$$

$$C_m^1 = \binom{m}{1} = m; \quad C_m^0 = \binom{m}{0} = 1. \qquad (8)$$

Задача Із 10 кандидатів на одну й ту саму посаду мають бути обрані троє. Скільки існує варіантів вибору?

• $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$. •

Задача Скількома способами можна вибрати 13 карт із колоди, в якій 52 карти?

Лекція 23

Тема: Теорема додавання та множення ймовірностей

Мета: ознайомитись з теоремами додавання та множення ймовірностей та вивчити випадки їх застосування

Метод: словесний , практичний

План

1 Теорема додавання ймовірностей

2 Теорема множення ймовірностей

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 522-528.

1 Теорема додавання ймовірностей

Випадкові події *A* і *B* називають *залежними*, якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої.

У противному разі випадкові події *A* і *B* називаються *незалежними*.

Приклад 1. В урні міститься 10 однакових кульок, із них 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться чорною і друга також.

Розв'язання. Позначимо через *A* появу чорної кульки при першому вийманні, а через *B* — при другому. Випадкові події *A* і *B* будуть залежними, оскільки поява чорної кульки при першому її вийманні з урни (випадкова подія *A*) впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (випадкова подія *B*) при другому вийманні.

Приклад 2. З урни, де шість білих і чотири чорні кульки, вийняли дві кульки по одній, при цьому перша кулька в урну повертається.

З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша виявиться чорною, друга також.

Розв'язання. Нехай *A* — поява чорної кульки при першому вийманні, а *B* — при другому. Поява чорної кульки при першому вийманні (здійснилась подія *A*) не впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (подія *B*) при другому вийманні, оскільки співвідношення між чорними та білими кульками в цьому разі не змінюється.

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A\ /\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0. \qquad (17)$$

Аналогічно

$$P(B\ /\ A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad P(A)\neq 0. \qquad (18)$$

1. $P(A / B) = 0$, якщо $A\cap B = \oslash$.

2. $P(A / B) = 1$, якщо $A\cap B = B$.

3. У решті випадків $0 < P(A / B) < 1$.

Приклад 1. Задана множина цілих чисел. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2.

Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$;

$B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$;

$A \cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$;

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};\ P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(A / B) = P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $P(A) \neq P(A / B)$, то події A і B є залежними.

Умовну ймовірність $P(A / B)$ для цієї задачі можна обчислити й інакше. За умовою задачі відомо, що взяте навмання число, є непарним, тобто в цьому разі ми дістали додаткову інформацію: із множини Ω беруться лише непарні числа. Отже, простір елементарних подій тепер має вигляд

$$\Omega' = \{1, 2, 5, 7, 9, 11\},\ n' = 6.$$

Елементарні події, що сприяють появі A, — появі числа, кратного 3, утворюють множину $A = \{3, 9\}$, $m' = 2$.

Отже,

$$P(A / B) = \frac{m'}{n'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Відомі значення:

$$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3;\ P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4;\ P(\overline{A \cap B}) = 0{,}9.$$

З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B.

Розв'язання.

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$

$$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5;$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Оскільки $P(A / B) \neq P(A),\ P(B) \neq P(B / A),$ то випадкові події A і B є залежними.

2 Теорема множення ймовірностей

Згідно із (17) і (18) маємо:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A / B) = P(A)\,P(B / A). \qquad (19)$$

Формула множення для n залежних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots A_4$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(A_3 / A_1A_2)\,\ldots\,P(A_n / A_1A_2 \ldots A_{n-1}) (20)$$

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A — три деталі виявляться стандартними;
2) B — усі три виявляться бракованими;
3) C — дві стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i — поява стандартної, $\overline{A_i}$ — бракованої деталі при i-му вийманні.

Подія $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$,

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(A_3 / A_1A_2) = \frac{9}{15}\,\frac{8}{14}\,\frac{7}{13} = \frac{12}{65};$$

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\;P(\overline{A_2}/\overline{A_1})\;P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\;\overline{A_2}) = \frac{6}{15}\,\frac{5}{14}\,\frac{4}{13} = \frac{6}{91}.$$

$$P(C) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\right) =$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= P(A_1)\;P(A_2 / A_1)\;P(\overline{A_3} / A_1A_2) + P(A_1)\;P(\overline{A_2} / A_1)\;P(A_3 / A_1\overline{A_2}) +$$
$$+ P(\overline{A_1})\;P(A_2 / \overline{A_1})\;P(A_3 / \overline{A_1}A_2) = \frac{9}{15}\;\frac{8}{14}\;\frac{6}{13} + \frac{9}{15}\;\frac{6}{14}\;\frac{8}{13} + \frac{6}{15}\;\frac{9}{14}\;\frac{8}{13} = \frac{216}{455}.$$

Приклад 2. Із множини чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти — друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?

Розв'язання. Позначимо через A_1 — поява непарної цифри при першому вийманні, через B_1 — поява парної цифри при першому, а через B_2 — появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай C — випадкова подія: поява парного двоцифрового числа.

Тоді $C = (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

$$P(C) = P(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) =$$
$$= P(A_1)\,P(B_2 / A_1) + P(B_1)\,P(B_2 / B_1) = \frac{5}{9}\,\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\,\frac{3}{8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

Множення ймовірностей
для незалежних випадкових подій

Якщо випадкові події A і B є незалежними, то $P(A / B) = P(A)$, $P(B / A) = P(B)$. Формули (19), (20) наберуть такого вигляду:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B); \qquad (21)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (22)$$

Приклад 1. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

Розв'язання. Нехай поява числа, кратного трьом — подія A, а поява герба — подія B. Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\qquad P(B)=\frac{1}{2};\qquad P(A\cap B)=P(A)\;P(B)=\frac{1}{3}\;\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 2. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Імовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7.

Обчислити ймовірності таких випадкових подій:
1) A — три студенти складуть екзамен;
2) B — три студенти не складуть екзамену;
3) C — два студенти складуть екзамен.

Розв'язання. Позначимо A_1, A_2, A_3 — випадкові події, які полягають у тому, що перший, другий і третій студенти складуть екзамен з математики. Тоді $\overline{A_1},\ \overline{A_2},\ \overline{A_3}$ — відповідно не складуть. За умовою задачі маємо:

$$P(A_1) = 0{,}9,\ \ P(A_2) = 0{,}8,\ \ P(A_3) = 0{,}7.$$

Тоді ймовірності протилежних подій такі:

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$
$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$
$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Позначимо події: $A=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$, $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$,

$$C\ =(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)\cup(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cup A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ є між собою незалежними, то

$P(A) = P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504;$

$P(B) = P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3) = P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006;$

$$P(C)=P\left(\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\right)\cup\left(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\right)\cup\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)\right)=$$
$$=P\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\right)+P\left(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\right)+P\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\;P(A_2)\;P\left(\overline{A}_3\right)+P(A_1)\;P\left(\overline{A}_2\right)\;P(A_3)+P\left(\overline{A}_1\right)\;P\overline{(A_2)\;P}(A_3)=$$
$$=0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}3+0{,}9\cdot0{,}2\cdot0{,}7+0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}7=0{,}216+0{,}126+0{,}056=0{,}398.$$

Нехай проводиться n незалежних спроб, у кожній з яких може відбутися подія A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots\ n)$ з імовірністю $P(A_i) = p_i$ або подія $\overline{A}_i$ $\left(A_i\cup\overline{A}_i=\Omega,\ A_i\cap\overline{A}_i=\varnothing\right)$ з імовірністю $P\left(\overline{A}_i\right)=q_i$, $\left(p_i+q_i=1\right)$.

Нехай C — поява події A_i хоча б один раз при n незалежних спробах, тобто ця подія може з'явитися або один раз, або двічі, тричі і так далі, включаючи всі n раз. Тоді подія C і подія, яка полягає в тому, що при n спробах A_i не з'явиться жодного разу $\left(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\cap\overline{A}_4=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)$, утворюють повну групу, а саме: $C\cup\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)=\Omega$. При цьому $C\cap\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)=\varnothing$.

Тоді $P\left(C\cup\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)\right)=P(C)+P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)=P(\Omega)=1;$

$$P(C) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A}_i\right).$$

Отже,

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \; . \qquad (23)$$

Якщо $P(A_i) = p_i = p = \text{const}$, то $q_i = q = \text{const}$.
Тоді

$$P(C) = 1 - q^n. \qquad (24)$$

Приклад 1. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8.

Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай $p_1 = 0{,}95$ — імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}85$; $p_4 = 0{,}8$. Імовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$$

$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

На підставі (23) маємо:

$$P(C) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985.$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв'язання. Імовірність того, що при одному підкиданні з'явиться цифра 3, дорівнює $\frac{1}{6}$. Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Згідно з (24) дістанемо:

$$P(C) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

Лекція 24

Тема: Дискретна випадкова величина. Закон розподілу.дискретної випадкової внличини

Мета: Вивчення поняття дискретної випадкової величини, законів розподілу і числові характеристики

Метод: словесний , практичний

План

1 Випадкові величини

2 Закони розподілу
3 Числові характеристики

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.-С. 532-542.

1 Випадкові величини

Випадковою називається величина, яка може набувати різних числових значень. Строгіше означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій, називається ***випадковою величиною***. Позначають випадкові величини X.Y.Z а їх значення xyz

Випадкова величина ***дискретн,*** якщо множина її значень скінченна.

Неперервному простору елементарних подій відповідає ***неперервна випадкова величина***.

Співвідношення між значеннями x_1 x_2 x_3 випадкової величини X і їхніми ймовірностями
p_1 p_2 p_{3_1}називається ***законом розподілу випадкової величини***.

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, що їх набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

Якщо $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, або, якщо величина набуває зліченної множини значень, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

2 Закони розподілу

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються у табличній формі (подаються значення випадкової величини і їхні ймовірності),

x_i	x_1	x_2	, , , „	x_n
$p($	p_1	p_2	„„„,	p_n

аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$; сполучивши точки відрізками прямих, дістанемо многокутник розподілу ймовірностей). Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є ***функція розподілу*** $F(x) = P(X < x)$. Для дискретних величин $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.

Функція розподілу — неспадна, неперервна зліва, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Якщо X — неперервна випадкова величина, то $F(x)$ — неперервна і диференційована; її похідна $f(x) = F'(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***. При цьому $f(x)$ — невід'ємна функція, для якої $P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

3 Числові характеристики

Математичним сподіванням, або середнім значенням, MX випадкової величини, називається ряд $\sum_i x_i p_i$ (для дискретних випадкових величин) і інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ (для неперервних випадкових величин), якщо вони абсолютно збіжні. Математичне сподівання має такі властивості:

1) $MC = C$ (C — стала);
2) $MCX = CMX$;
3) $M(X + Y) = MX + MY$;
4) $MXY = MX \cdot MY$, якщо X і Y — незалежні випадкові величини.

Дисперсія (позначається через DX) випадкової величини X визначається за формулою:

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) $DC = 0$;
2) $DCX = C^2 DX$;
3) $D(X + Y) = DX + DY$, якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення (позначається літерою σ) є квадратним коренем із дисперсії.

1. Біноміальний закон розподілу

Імовірності в цьому законі визначаються за формулою $P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$, m = 0,1,2, …, n. Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з імовірністю p. Частота настання події A має біноміальний закон розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = np, \; DX = np(1 - p).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Ймовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X — кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти MX і DX, а також імовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв'язання. Подамо закон розподілу для випадкової величини X у табличній формі. Очевидно, що випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення X = 1, буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь, а з другої — придатну. За теоремою множення імовірностей ймовірність цієї події $P(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$. Аналогічно, X = 3, якщо деталі, виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки — придатна. $P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$. Нарешті, X = 4, якщо деталі, виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$.

Запишемо закон розподілу:

x_i	1	2	3	4
$p($	0,7 5	0,1 875	0,04 6875	0,1 5625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними щойно формулами.

$$MX=1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{1}{64}=\frac{85}{64};\quad MX^2=1\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{16}+9\cdot\frac{3}{64}+16\cdot\frac{1}{64}=\frac{139}{64};$$

$$DX=\frac{139}{64}-\left(\frac{85}{64}\right)^2=\frac{1671}{4096}.$$

Якщо подія A — «із чотирьох заготівок виготовлено одну придатну деталь», то

$$P(A)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{255}{256}.$$

Лекція 25

Тема: Математична статистика. Вибірки, Вибіркові розподіли.

Мета: зясувати предмет і методи математичної статистики, вивчити поняття вибірки і вибіркового розподілу

Метод: словесний , практичний

План

1 Основні поняття

2 Вибірка

3 Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 24-25.

1 Основні поняття

Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту, називають *математичною статистикою*.

Основним змістом математичної статистики є систематизація, обробка і використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Генеральну сукупність -множина Ω однотипних елементів, яким притаманні певні кількісні ознаки (розміри, вага, маса тощо),.

Обсяг генер. сукупн. -кількість усіх елементів генеральної сукупності , позначають символом N, значення якого здебільшого невідоме.

2 Вибірка

Вибірка кожна непорожня підмножина A множини Ω ($A \subset \Omega$) випадково вибраних елементів із генеральної сукупності називається.

Кількість усіх елементів вибірки називають її обсягом і позначають символом n. Його значення відоме, причому воно набагато менше за обсяг генеральної сукупності ($n \ll N$).

Математична статистика розв'язує дві категорії задач:

1) статистичне оцінювання (точкове, інтервальне) параметрів генеральної сукупності;

2) перевірка правдивості статистичних гіпотез про значення параметрів генеральної сукупності або про закон розподілу ознаки генеральної сукупності на підставі обробки результатів вибірки.

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають *варіантою*.

Зростаючий числовий ряд варіант називають *варіаційним*.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають *частотою варіанти* x_i.

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i ,$$

де k — кількість варіант, що різняться числовим значенням;

n — обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її *відносною частотою* і позначають через W_i , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n} .$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1 .$$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X, яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд — це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди, у котрих інтервали є рівними між собою.

3 Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі він має такий вигляд:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k
W_i	W_1	W_2	W_3	...	W_k

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпірична функція $F^*(x)$ та її властивості. Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} ,$$

називається *емпіричною*, або *комулятою*.

Тут n — обсяг вибірки;

n_x — кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x;

$F^*(x)$ — називають ще *функцією нагромадження відносних частот*.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3) $F(x)\big|_{x>x_{\max}}=1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, а саме: $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$.

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок (x_i; n_i), або (x_i; W_i).

У першому випадку ламану лінію називають *полігоном частот*, у другому — *полігоном відносних частот*.

***Числові характеристики*:**

1) *вибіркова середня величина* $\bar{x}_{\text{В}}$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_{\text{В}}=\frac{\sum x_i n_i}{n},$$

називають *вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки*.

Тут x_i — варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i — частота цієї варіанти;

n — обсяг вибірки ($n=\sum n_i$).

Якщо всі варіанти з’являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то

$$\bar{x}_{\text{В}}=\frac{\sum x_i}{n};$$

2) *відхилення варіант*. Різницю ($x_i-\bar{x}_{\text{В}}$)n_i називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum(x_i-\bar{x}_{\text{В}})n_i=\sum x_i n_i-\sum \bar{x}_{\text{В}} n_i=n\cdot\bar{x}_{\text{В}}-n\cdot\bar{x}_{\text{В}}=0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) *мода* (Mo*). *Модою дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди — *двомодальним* і т. д.;

4) *медіана* (Me*). *Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) *дисперсія.* Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_{\text{В}}$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки — це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_{\text{В}}$, яке обчислюється за формулою

$$D_{\text{В}}=\frac{\sum(x_i-\bar{x}_{\text{В}})^2 n_i}{n}$$ або

$$D_{\text{В}}=\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}-(\bar{x}_{\text{В}})^2;$$

6) *середнє квадратичне відхилення вибірки* $\sigma_{\text{В}}$. При обчисленні $D_{\text{В}}$ відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X, тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\text{В}}=\sqrt{D_{\text{В}}},$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_{\text{В}}$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X;

7) *розмах* (*R*). Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_{\text{В}}$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою $x_{\max}$ і найменшою $x_{\min}$ варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається *розмахом*

$$R = x_{\max} - x_{\min};$$

8) *коефіцієнт варіації V.* Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_{\text{В}}$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_{\text{В}}}{\bar{x}_{\text{В}}} 100\%.$$

Приклад. За заданим статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

потрібно:

1) обчислити $\bar{x}_{\text{В}}$, $D_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$;

2) знайти Mo*, Me*;

3) обчислити *R*, *V*.

Розв'язання. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, то згідно з формулами (354), (357), (358) дістанемо:

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2{,}5 \cdot 10 + 4{,}5 \cdot 20 + 6{,}5 \cdot 30 + 8{,}5 \cdot 30 + 10{,}5 \cdot 10}{100} = 6{,}7;$$

$$\bar{x}_{\text{В}} = 6{,}7.$$

Для обчислення $D_{\text{В}}$ визначається

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(2{,}5)^2 \cdot 10 + (4{,}5)^2 \cdot 20 + (6{,}5)^2 \cdot 30 + (8{,}5)^2 \cdot 30 + (10{,}5)^2 \cdot 10}{100} = 50{,}05.$$

Тоді

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_{\text{В}})^2 = 50{,}05 - (6{,}7)^2 = 50{,}05 - 44{,}89 = 5{,}16.$$

$D_{\text{В}} = 5{,}16.$

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}27.$$

$\sigma_{\text{В}} = 2{,}27.$

Mo* = 6,5; 8,5.

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде двомодальним. Me* = 6,5, оскільки варіанта $x = 6{,}5$ поділяє варіаційний ряд 2,5; 4,5; **6,5**; 8,5; 10,5 на дві частини: 2,5; 4,5 і 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10{,}5 - 2{,}5 = 8.$$

$$V = \frac{\sigma_{\text{В}}}{\bar{x}_{\text{В}}} 100\% = \frac{2{,}27}{6{,}7} 100\% = 33{,}88\%.$$