Міністерство освіти і науки України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
__________Л.М. Рославець
_____ ___________2018 р.

Методичні вказівки щодо організації
самостійної роботи з дисципліни Вища математика
для студентів II курсу спеціальності

151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Уклав Кузьменко О.М.

Розглянуто на засіданні циклової комісії
спеціальних механічних та загально-технічних дисциплін

Протокол №__ від ___ _________ 20__ року

Голова циклової комісії_______________ Т.І. Семерня

Самостійна робота № 1

Тема: Методи обчислення визначників
Мета: формувати вміння та навики обчислення визначників II та III порядків

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1. Визначники n-го порядку.
2. Методи обчислення визначників.

Практичні завдання:

Обчислити визначники трьома способами: за правилом трикутника, розкладом за елементами 2-го рядка, розкладом по елементам будь-якого рядка чи стовпця з попереднім перетворенням, щоб всі елементи цього рядка чи стовпця, крім одного, стали нулями:

$$1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} \qquad 2.\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \qquad 3.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001,с 6-12.

Питання для самоконтролю:

1. Пояснити обчислення визначників другого порядку.
2. Пояснити обчислення визначників третього порядку.
3. Що називається визначником 4-го порядку? Методи обчислення визначників 4-го порядку?
4. Методи обчислення визначників 5-го і вищих порядків.

Теоретичні відомості

Користуючись означенням, можна обчислювати визначники малого порядку або визначники спеціального вигляду. Для обчислення визначників n–го порядку існують спеціальні методи. У кожному методі суттєво використовується структура самого визначника.

1. Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що стоять вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий визначник дорівнює добутку елементів його головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Метод зведення визначника до трикутного вигляду полягає в тому, що, користуючись властивостями визначників, даний визначник перетворюється так, щоб одержати визначник трикутного вигляду відносно головної і далі одержується результат.

Нехай задано визначник n–го порядку загального вигляду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Будемо зводити цей визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Якщо всі елементи першого стовпчика дорівнюють нулю, то $\Delta = 0$. В супротивному випадку будемо вважати, що $a_{11} \neq 0$ (інакше знаходимо в першому стовпчику ненульовий елемент і рядок, в якому він знаходиться, додамо до першого рядка). Будемо перетворювати визначник Δ так, щоб одержати визначник, в якому всі елементи першого стовпчика, крім першого, дорівнюють 0. Для цього віднімемо від другого рядка перший, помножений на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Далі від третього рядка віднімемо перший, помножений на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Продовжуючи цей процес, нарешті від n-го рядка віднімемо перший, помножений на число $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ Згідно з властивостями визначників, ці перетворення не змінюють величини визначника Δ. Одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Якщо в цьому визначнику всі елементи $b_{22}, b_{32},\dots,b_{n2}$ дорівнюють 0, то $\Delta = 0$. Дійсно, якщо розкласти в такому випадку визначник Δ за елементами першого стовпчика, одержуємо $\Delta = a_{11} \cdot A_{11}$, де A_{11} – алгебраїчне доповнення елемента a_{11}; $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$ де M_{11} – доповнюючий мінор елемента a_{11}; M_{11} – визначник порядку n-1, перший стовпчик якого нульовий, тому $M_{11} = 0$, звідки $A_{11} = 0$ і $\Delta = 0$. Тому далі будемо вважати, що серед елементів b_{22}, b_{32}, $\dots,b_{n2}$ є ненульові, а тоді можна вважати $b_{22} \neq 0$ (в супротивному випадку можна до другого рядка додати деякий рядок, що стоїть після нього і другий елемент якого не дорівнює нулю). Далі перетворюємо визначник так, щоб одержати визначник, в якому всі елементи другого стовпчика, починаючи з третього, дорівнюють нулю. Для цього спочатку від третього рядка віднімаємо другий, помножений на число $\frac{b_{32}}{b_{22}}$. Далі, аналогічно, від четвертого рядка віднімемо другий, помножений на число $\frac{b_{42}}{b_{22}}$. Продовжуючи цей процес, нарешті від n-го рядка віднімаємо другий, помножений на $\frac{b_{n2}}{b_{22}}$. Всі ці перетворення не змінюють величини визначника. В результаті одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес одержання нулів нижче головної діагоналі, через скінчене число кроків або переконаємось в тому, що $\Delta = 0$, або зведемо визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. В цьому випадку

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

причому $x_{11}= a_{11}\neq 0$, $x_{22}= b_{22}\neq 0$, $x_{33}= c_{33} \neq 0,\dots, x_{nn} \neq 0$. Отже,

$$\Delta = x_{11}x_{22}x_{33}\dots x_{nn}$$

Методом зведення до трикутного вигляду можна обчислювати визначники малих порядків.

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Нарешті від п'ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другом місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п'ятого рядка додамо другий, помножений на 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п’ятого віднімемо третій, помножений на 4

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п’ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{52}{3} = 52$

На практиці рекомендується при обчисленні визначників з цілими елементами на кожному кроці одержувати визначники також з цілими елементами. У нашому випадку перед виконанням останнього кроку перетворень можна було, наприклад, перейти від визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

до визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{vmatrix}$$

відніманням від п’ятого рядка четвертого, помноженого на 2. Далі переставимо четвертий і п’ятий рядки. Як відомо, при цьому змінюється знак визначника:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \end{vmatrix}.$$

Нарешті до п’ятого рядка додамо четвертий, помножений на 3:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, $\Delta = -(1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 52) = 52$.

2. Обчислення визначника розкладом за рядком (стовпчиком)

Приклад 2. Обчисли визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Розв'язування</u>. Зручніш за все робити розклад за рядком (стовпчиком), в яких зустрічається найбільше число нульових елементів. В данному випадку – це четвертий стовпчик. Ітак за теоремою 1 маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_1 + 3 \cdot \Delta_2$$

Отримані в результаті два визначника третього порядку обчислюємо тим самим методом. У визначнику Δ_1 нульових елементів немає, тому можна вибрати для розкладу будь-який із стовпчиків, наприклад, перший. В Δ_2 єдиний нульовой елемент знаходиться на перетині першого стовпчика і другого рядка. Будемо розкладати Δ_2 за другим рядком:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-6-2)-3\cdot(-6-1)+3\cdot(-2+1)=$$
$$=-16+21-3=2$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+$$
$$+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(4-3)-2\cdot(-2+3)=1-2=-1$$

Таким чином отримаємо

$$\Delta=\Delta_1+3\Delta_2=2+3\cdot(-1)=-1$$

2. Обчислення визначника шляхом перетворення в нуль всіх, окрім одного, елементів рядка (стовпчика)

Приклад 3. Обчислити визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

<u>Розв’язання</u>. Будемо зануляти всі, окрім першого, елементи першого рядка. Для цього віднімемо від другого, третього і четвертого стовпчика перший стовпчик, помножений відповідно на 2, 3 і 4. Отримаємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2-2 & 3-3 & 4-4\\ 2 & 3-4 & 4-6 & 1-8\\ 3 & 4-6 & 1-9 & 2-12\\ 4 & 1-8 & 2-12 & 3-16\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -2 & -7\\ 3 & -2 & -8 & -10\\ 4 & -7 & -10 & -13\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 7\\ 3 & 2 & 8 & 10\\ 4 & 7 & 10 & 13\end{vmatrix}.$$

Отриманий в такому вигляді визначник розкладемо за першим рядком:

$$\Delta=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 7\\ 3 & 2 & 8 & 10\\ 4 & 7 & 10 & 13\end{vmatrix}=(-1)\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & 8 & 10\\ 7 & 10 & 13\end{vmatrix}$$

Визначник третього порядку, який отримали, будемо обчислювати тим самим способом. Віднімемо від другого і третього стовпчика перший стовпчик, помножений відповідно на 2 і 7. Отримаємо (попутно винесемо спільні множники із стовпчиків)

$$\Delta = (-1)\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 7 & -4 & -36 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 4\cdot(-4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 16\cdot(9+1) = 160.$$

Самостійна робота № 2

Тема: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь
Мета: формувати поняття систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Лінійні алгебраїчні рівняння

Практичні завдання:

Знайти розв’язок системи рівнянь:

Література:

Курс математики для техникумов. /Под редакцией Матвеева Н.М. ч.1,2- М.:Наука, 1977, с 181-184.

Питання для самоконтролю:

1 Шо називається розв`язком системи рівнянь
2 Еквівалентні перетворення системи рівнянь

Теоретичні відомості

ЛІНІЙНі

АЛГЕБРАЇЧНі РІВНЯНння

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Означення. **Розв'язком** системи (1) називається сукупність значень невідомих

$$x_1 = \alpha_1, \; x_2 = \alpha_2, \; \ldots, \; x_n = \alpha_n,$$

що задовольняють усі рівняння системи (1).

Означення. Система рівнянь (1) називається **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має розв'язків. Система рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має лише один розв'язок, і **невизначеною,** якщо вона має безліч розв'язків.

Дві системи рівнянь з однаковими невідомими називаються **рівносильними**, якщо кожний розв'язок однієї системи є розв'язком іншої системи або якщо ці системи рівнянь несумісні.

У результаті еквівалентних перетворень системи рівнянь завжди дістаємо рівносильну систему рівнянь. **До еквівалентних перетворень системи належать:**

1) переставлення місцями рівнянь;
2) множення або ділення рівнянь на число, що не дорівнює нулю;
3) додавання до деякого рівняння іншого рівняння, помноженого на довільне число.

Будь-який метод розв'язування системи рівнянь (1) передбачає виконання еквівалентних її перетворень, завдяки яким вона зводиться до такого вигляду, що розв'язок уже легко знайти.

Запишемо вектори-стовпці

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Для того щоб система рівнянь (1) була сумісною, тобто мала принаймні один розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор $\mathbf{b}$ був лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, тобто щоб ранг *r* системи векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ дорівнював рангу розширеної системи векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$.

Звідси дістаємо **умову Кронекера—Капеллі** сумісності системи рівнянь.

Для того щоб система (1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг *r* матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$r = \operatorname{rank} A$ дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Нехай система рівнянь (1) сумісна, тобто виконується рівність

$$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} .$$

Якщо, $m = r$, то всі рівняння системи (1) лінійно незалежні. У матриці A візьмемо мінор порядку r, відмінний від нуля. Цей мінор називається **базисним**.

Очевидно, що вибір базисного мінора неоднозначний. Якщо $m > r$, то рівняння, коефіцієнти яких входять до базисного мінора, лінійно незалежні, причому решта $m - r$ рівнянь є лінійними комбінаціями лінійно незалежних рівнянь.

Якщо $n = r$, то всі шукані змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ визначаються єдиним чином. Якщо $n > r$, то змінні, коефіцієнти при яких входять до базисного мінора, називаються **базисними**.

Решту змінних називають **вільними**. Значення таких змінних можна вибирати довільно. Якщо вільні змінні вибрано, то базисні змінні можна вибрати єдиним чином. Якщо вільні невідомі дорівнюють нулю, то відповідний розв’язок системи (1) називається **базисним**.

Розглянемо однорідну систему рівнянь, що відповідають системі (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Вона сумісна, бо завжди має нульовий розв’язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Якщо $n = r$, то система (4) має єдиний нульовий розв’язок. Якщо $n > r$, то система (4) має $n - r$ лінійно незалежних ненульових розв’язків:

$$x_1 = \alpha_{1s}, \ x_2 = \alpha_{2s}, \ \dots, \ x_n = \alpha_{ns} \ (s = 1, \dots, (n - r)) . \quad (5)$$

Будь-яка лінійна комбінація розв’язків

$$x_1 = \sum_{s=1}^{n-r} c_s \alpha_{1s}, \ x_2 = \sum_{s=1}^{n-r} c_s \alpha_{2s}, \ \dots, \ x_n = \sum_{s=1}^{n-r} c_s \alpha_{ns} \quad (6)$$

також є розв’язком системи рівнянь (4).

Якщо всі розв’язки (5) лінійно незалежні, тобто ранг матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,\ n-r} & \alpha_{2,\ n-r} & \dots & \alpha_{n,\ n-r} \end{pmatrix}$$

дорівнює ($n - r$), то система розв’язків (5) називається **фундаментальною**.

Будь-який розв’язок системи рівнянь (4) можна подати у вигляді (6), тобто у вигляді лінійної комбінації розв’язків (5), які утворюють фундаментальну систему розв’язків.

При цьому розв’язок (6) системи рівнянь (4) називається **загальним розв’язком однорідної системи** (4).

Загальний розв’язок системи (1) є сумою деякого **частинного розв’язку** цієї системи, наприклад базисного розв’язку, і загального розв’язку однорідної системи рівнянь (4).

Приклад

Розглянемо систему п’яти лінійних рівнянь з чотирма невідомими

[illegible] (7)

• Можна переконатися, що ранг матриці коефіцієнтів і ранг розширеної матриці дорівнюють $r = 2$. За базисний мінор візьмемо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, елементи якого входять до перших двох рівнянь і є коефіцієнтами при x_1, x_2. Отже, базисними невідомими є x_1, x_2, вільними невідомими — x_3, x_4.

Замість системи (7) можна розв’язати систему, утворену з двох перших рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Візьмемо вільні невідомі $x_3 = 0$ і $x_4 = 0$, а далі знайдемо базисний розв’язок системи рівнянь (7): $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$.

Вважаючи x_3 і x_4 довільними змінними, із системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 + x_3 - 2x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 - x_4 \end{cases}$ знайдемо розв’язки

$$x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4;$$

$$x_2 = 2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4.$$

Нехай $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Тоді загальний розв’язок

$$x_1 = 1 - \frac{3}{5}C_1 - \frac{4}{5}C_2, \quad x_2 = 2 + \frac{4}{5}C_1 - \frac{3}{5}C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 =$$

Запишемо однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Вона має лінійно незалежні розв’язки:

$$x_1 = -7,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5,\ x_4 = 5;$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 7,\ x_3 = 5,\ x_4 = -5,$$

які утворюють фундаментальну систему розв’язків системи (5).

Отже, система рівнянь (7) має загальний розв’язок

$$x_1 = 1 - 7C_1 + C_2,\ x_2 = 2 + C_1 + 7C_2,\ x_3 = 5C_1 + 5C_2,\ x$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. •

Загальний розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь подається не в одному й тому самому вигляді.

Самостійна робота № 3

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса
Мета: формувати вміння та навики розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Практичні завдання:
Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:
1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.: 2001, с 21-25.

Питання для самоконтролю:

1 Назвати алгоритм розв'язку системи лінійних рівнянь метод Гаусса

2 Розв'язати систему лінійним рівнянь методом Гаусса

Теоретичні відомості

Метод Гаусса розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в **послідовному виключенні змінних** і перетворенні системи рівнянь

(1)

до трикутного вигляду

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n &= b_{10}; \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_{20}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_{nn}x_n &= b_{n0},\ b_{kk} = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \qquad (2)$$

Припустимо, що в системі (1) коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то на перше місце переносимо таке рівняння, щоб виконувалась умова $a_{11} \neq 0$.

За допомогою першого рівняння виключимо x_1 із решти рівнянь. Обчислення виконаємо в таблиці:

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{10} \\ A_0: & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{20} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{n0} \end{array}$$

Іноді вводять контрольний стовпець $K = \sum_{s=0}^{n} a_{ks}$, що дає змогу виявляти помилки.

Поділивши перший рядок на a_{11}, позначимо

$$a_{1k}^{(1)} = \frac{a_{1k}}{a_{11}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Далі перший рядок множимо послідовно на a_{21} і віднімаємо від другого рядка, множимо на a_{31} і віднімаємо від третього рядка і т. д.

Позначивши

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{k1}a_{1k} \quad (i = 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

дістанемо таблицю коефіцієнтів:

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & a_{10}^{(1)} \\ A_1: & 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & a_{20}^{(1)} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & a_{n0}^{(1)} \end{array}$$

Для невідомих $x_2, \ldots, x_n$ маємо систему $n-1$ рівнянь. Міркуючи, як і раніше, виключимо x_2 з усіх рівнянь, починаючи з третього. Для цього спочатку поділимо другий рядок на $a_{22}^{(1)}$. Якщо коефіцієнт $a_{22}^{(1)}=0$, то переставимо рівняння так, щоб виконувалася умова $a_{22}^{(1)}\neq 0$.

Позначивши

$$a_{2k}^{(2)}=\frac{a_{2k}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\ (k=2,\ \ldots,\ n;\ 0),$$

помножимо другий рядок послідовно на $a_{32}^{(1)}$ і віднімемо від третього рядка; на $a_{42}^{(1)}$ і віднімемо від четвертого рядка і т.д. Дістанемо таблицю коефіцієнтів:

$$A_2:\quad \begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & a_{10}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & a_{20}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} & a_{30}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & \ldots & a_{4n}^{(3)} & a_{40}^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \ldots & a_{nn}^{(3)} & a_{n0}^{(3)} \end{array}$$

Продовжуючи процес виключення невідомих, дістаємо нарешті таблицю:

$$A_n:\quad \begin{array}{c|ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{n-1} & x_n & 1 \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(1)} & a_{10}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & a_{20}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & a_{30}^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & a_{n-1,0}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n0}^{(n)} \end{array}$$

Таблиця коефіцієнтів при невідомих набирає трикутного вигляду. На головній діагоналі всі елементи $a_{kk}^{(k)}=1$. Запишемо відповідну систему рівнянь:

(3)

$$a_{kk}^{(k)}=1(k=1,2,\ldots,n).$$

Цю систему розв'язують, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знаходять x_n і підставляють в передостаннє рівняння, з якого визначають x_{n-1}, і т.д.

Якщо система рівнянь з *n* невідомими має єдиний розв'язок, то ця система завжди може бути перетворена до трикутного вигляду.

Приклад Знайдемо розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=6, \\ x_1+2x_2-x_3=5, \\ 2x_1-x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

за методом Гаусса.

• Складемо таблицю

$$A_0:\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

Перший рядок віднімемо від другого. Далі помножимо перший рядок на другий і віднімемо від третього рядка. Дістанемо таблицю

$$A_1:\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 8 & -11 \end{array}$$

Помножимо другий рядок на третій і додамо до третього рядка:

$$A_2:\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}$$

Поділивши останнє рівняння на 14, дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Послідовно знайдемо: $x_3 = -1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 2$.

Самостійна робота № 4

Тема: Криві другого порядку

Мета: формувати вміння та навики знаходження центра еліпса та його побудови, центра гіперболи та її побудови, центра параболи та її побудови

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1. Коло.
2. Еліпс. Рівняння еліпса із зміщеним центром.
3. Гіпербола. Рівняння гіперболи із зміщеним центром.
4. Парабола. Паралельний перенос параболи.

Практичні завдання:

1. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

2. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

3. Гіпербола дотикається до прямої $x-y=2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

4. До параболи $y^2=12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x+y-7=0.$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникум.-М.:Наука, 1990, с 145-171.

Питання для самоконтролю:

1. Виконати побудову кола.
2. Пояснити принцип знаходження центра еліпса та його побудова.
3. Пояснити принцип знаходження центра гіперболи та її побудови.
4. Пояснити поняття паралельного переносу параболи.

Теоретичні відомості

Криві другого порядку

Розглянемо лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.\quad(2.19)$$

Рівняння (2.19) описує всі криві другого порядку в загальному випадку.

Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс. *Означення.* Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

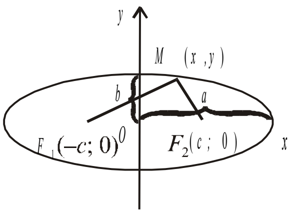


Рис. 2.16

На рис. 2.16 зображено F_1 $(-c, 0)$, F_2 $(c, 0)$ — фокуси еліпса, M (x, y) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a,$ причому $2c < < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.20)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2.20). Якщо $x = 0$, $y = \pm\, b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm\, a$ і відповідно $(a, 0)$; $(-a; 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.20) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 2.16 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 2.17, з якого бачимо, що точки F_1 $(-c, 0)$ і F_2 $(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

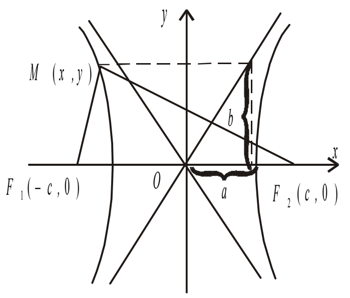


Рис. 2.17

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь *Oy*. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю *Ox*. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm\frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей *Ox* і *Oy*, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 2.17.

Відрізки завдовжки *b* і *a* називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі *Ox*.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі *Oy* і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі *Oy* і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: **якщо *r* — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а *d* — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стале й дорівнює ексцентриситету, тобто** $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола*, *якщо* $\varepsilon > 1$.

Парабола. *Означення*. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

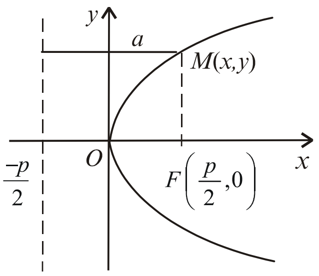


Рис. 2.18

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 2.18):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px$$

— **канонічне рівняння параболи**, коли ε = 1. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 2.18.

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис. 2.19).

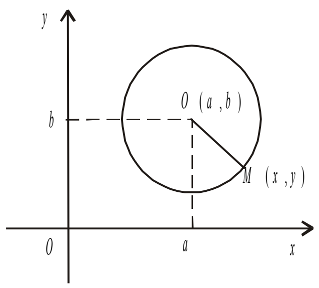


Рис. 2.19

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (2.21)$$

— **канонічне рівняння кола**.

Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Приклади:

1. Дано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, через точку A (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

● Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння (2.15) $(y - 1) = k(x - 1)$. Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y - 1 = k(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4 + 9k^2)x^2 + 18k(1 - k)x + 9(1 - k)^2 - 36 = 0 \\ y = kx + 1 - k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1), (x_2, y_2) мають задовольняти рівності: $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ і $\frac{y_1+y_2}{2}=1$. З теореми Вієта і останньої умови маємо: $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2}=2,$ звідки $k=-\frac{4}{9}$. Шукане рівняння хорди набирає вигляду $y-1=-\frac{4}{9}(x-1),$ або $4x+9y-13=0$.

2. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;

3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;

4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

• 1) Координати фокусів F_1 (– c; 0); F_2 (c; 0), тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$ маємо: $a = 12$, $b = c - a = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і $a = 6$; $b = 6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3},$ звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$, або $b=\frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\quad a^2=\frac{171}{25},\quad b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$

3. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

• Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв’язок:

$$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2-\frac{2p}{k}y+\frac{2pb}{k}=0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p(p - 2bk) = 0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

4. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

• Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25, \text{ або } (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25,$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36, \text{ або } (x+1)^2 + (y-6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого — C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням (2.16), знайдемо

$$\frac{y+4}{6+4} = \frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ — шукане рівняння центрів кіл.

Самостійна робота № 6

Тема: Знаходження оберненої матриці
Мета: формувати вміння та навики знаходження оберненої матриці

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

2 Поняття оберненої матриці.
3 Знаходження оберненої матриці.

Практичні завдання:
Знайти обернену матрицю:

$$1\ \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 2\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 3\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Література:

Курс математики для техникумов. /Под редакцией Матвеева Н.М. ч.1,2- М.:Наука, 1977, с 181-184.

Питання для самоконтролю:

1. Пояснити поняття оберненої матриці.
2. Умова існування оберненої матриці.
3. Назвати порядок знаходження оберненої матриці.

Теоретичні відомості

Означення. *Матриця* A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** A, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Нехай дано квадратну матрицю A. Доведемо, що коли $\Delta(A) \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1}. Розглянемо матрицю:

$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$. Утворимо добутки AB і BA.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці C знаходимо за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}. \qquad (1.6)$$

Якщо $i = j$, то згідно з формулою (1.3) маємо: $c_{ii} = \Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці A; якщо $i \neq j$, то вираз (1.6) є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j-му рядку цього самого визначника. За властивістю 9 визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже, $c_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Матриця C набирає вигляду: $C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}$. Щоб ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\frac{1}{\Delta(A)}$.

$$E = \frac{1}{\Delta(A)} C = A \frac{1}{\Delta(A)} B = AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для матриці A матриця A^{-1} єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C, така що $AC = CA = E$. Тоді

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$

а водночас

$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}, \text{ звідси } C = A^{-1}.$$

Доходимо висновку, що початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

Повернемось тепер до виразу (1.5) — запису системи рівнянь у матричному вигляді $AX = B$. Припустимо, що система складається з n лінійних рівнянь з n невідомими, матриця A — квадратна і $\Delta(A)\neq 0$ — матриця невироджена. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1} — вона за тих припущень, які щойно зроблено, існує. Помноживши тепер матричну рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B,$$

або остаточно $X = A^{-1}B$.

Останній вираз — це розв'язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв'язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1}.

Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

- Обчислимо:

$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5$. $\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Самостійна робота № 8

Тема: Розкриття невизначеностей
Мета: формувати вміння та навики знаходження границь функцій

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Границя відношення двох многочленів, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ де x_0 - число.

2 Границя відношення двох многочленів $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3 Границя відношення ірраціональних функцій.

Практичні завдання:
Знайти:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$.

8) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{3x+2}$.

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990, с 194-198.

Питання для самоконтролю:

1 Дати визначення границі функції.

2 Пояснити обчислення границі відношення двох многочленів, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, x_0 - число.

3 Пояснити обчислення границі відношення двох многочленів $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

4 Пояснити обчислення границі відношення ірраціональних функцій.

Теоретичні відомості

Розкриття невизначених виразів типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$ для алгебраїчних функцій

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, коли порушуються умови теореми про граничний перехід при арифметичних операціях, розв'язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$.

Розглянемо деякі загальні рекомендації щодо дослідження таких невизначених виразів, обмежуючись тільки алгебраїчними функціями.

1. Невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Спочатку нагадаємо деякі положення алгебри многочленів. Многочлен $P_n(x)$ називається *упорядкованим*, якщо

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Теорема (Безу). **Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $x - a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a$, тобто $P_n(a)$.**

Наслідок. Якщо число a — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x - a$.

Приклад. Розкласти на множники $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$. Оскільки $P_3(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ — корінь $P_3(x) \Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на $x - 1$. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^3 - 2x^2 + 6x - 5 & x - 1 \\
\underline{\;\;x^3 - x^2\;\;} & \overline{x^2 - x - 5} \\
\quad -\,-x^2 + 6x & \\
\quad\;\;\underline{-x^2 + x} & \\
\qquad\;\; -\,5x - 5 & \\
\qquad\;\;\;\;\underline{5x - 5} & \\
\qquad\qquad\;\; 0 &
\end{array}$$

Отже,

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5 = (x - 1)(x^2 - x + 5).$$

Розглянемо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — такі многочлени, що $P_n(a) = 0$, $Q_m(a) = 0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $x - a$, тобто чисельник і знаменник мають спільний множник $x - a$. Отже, дістаємо:

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)P_{n-1}(x)}{(x - a)Q_{m-1}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочленів як у чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, то наведений алгоритм повторюють.

Зауважимо, що скорочення дробу на множник $x - a$ під знаком границі можливе, бо за означенням границі функції змінна x як завгодно близька до числа a, але $x \neq a$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1}=\frac{1-1+5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Отже, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x\to a$ для раціональних функцій розкривається діленням многочленів у чисельнику і знаменнику на двочлен $x - a$.

2. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій

Для розв'язування задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Приклад.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} x=t^6 \\ x\to 1 \\ t\to 1\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

3. Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

ОСОБЛИВІ ГРАНИЦІ

Перша особлива границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Границі — наслідки першої особливості границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}.$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

● Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної *x*, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi-x=y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\dfrac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{y}{4}\right)}{16\left(\dfrac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Друга особлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Границі — наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$.

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right].$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}=\left|\begin{array}{l}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e\\ \frac{\sin 2x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}2\end{array}\right|=e^{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\frac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \frac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}.$$

Самостійна робота № 9

Тема: Рівняння прямої в просторі

Мета: формувати вміння та навики знаходження кута між двома прямими, між прямою і площиною, записувати умови паралельності і перпендикулярності двох прямих і прямої і площини

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Різні види рівнянь прямої в просторі.

2 Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярнос прямих.

3 Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Практичні завдання:

1. Дано три точки А, В, С на площині. Знайти:
   - кут А;
   - рівняння прямої, що проходить через точку В перпендикулярно прямій АС;
   - рівняння прямої через точку В паралельно прямій АС;

   А(1;3), В(4;2), С(-3;-4)
2. Піраміда задана вершинами А, В, С, Д. Знайти:

   - кут між площинами ВСД і АСД;
   - довжину висоті АМ.

   А(-1;3;3), В(1;-2;1), С(-3;1;1) ,Д(-2;3;-2)

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001, с 89-96.

Питання для самоконтролю:

2 Різні види рівнянь прямої в просторі.

3 Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярнос прямих.

4 Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Теоретичні відомості

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Будь-яка пряма лінія у просторі подається системою двох рівнянь які задають (коли розглядати кожне з них зокрема) дві різні площини, що проходять через цю пряму.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\}.} \qquad (1)$$

Рівняння (1), узяті разом, називаються **загальними рівняннями прямої**. Напрямний вектор $\mathbf{s}$ цієї прямої ортогональний до кожної з нормалей

$$\mathbf{n}_1=\{A_1,\,B_1,C_1\}, \quad \mathbf{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}.$$

Отже, можна вважати що

$$\boxed{\mathbf{s}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2.}$$

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої до канонічного її рівняння, достатньо взяти дві різні точки на прямій і скористатися рівнянням (2) із підрозд. 3.5.6.

Приклад Перейдемо від загального рівняння прямої

$$x+y+2z+4=0, \;\; x-y-2z-6=0$$

до канонічного.

• Візьмемо $z_1=0$, та із системи рівнянь $x_1+y_1+4=0$, $x_1-y_1-6=0$ знайдемо $x_1=1$, $y_1=-5$.

Покладемо $z_2=1$, то із системи рівнянь $x_2+y_2+6=0$, $x_2+y_2-8=0$ знайдемо $x_2=1$, $y_2=-7$. Канонічне рівняння прямої набере вигляду

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{1}. \bullet$$

Щоб дістати довільну площину, яка проходить через пряму (1), застосовують пучок площин:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \qquad (2)$$

***Теорема.* Коли площини (1) не паралельні, то вибором параметра $\boldsymbol{\lambda}$ в рівнянні (2) можна утворити будь-яку площину, що проходить через пряму (1), окрім другої площини.**

Приклад Складемо рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ і точку $M_1(1,\,1,\,1)$.

• Знаходимо загальні рівняння прямої

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}, \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

або

$$2x-y=0, \;\; x+z-4=0.$$

Утворимо пучок площин

$$2x-y+\lambda(x+z-4)=0$$

і визначимо ту з них, якій належить точка $M_1(1,\,1,\,1)$. Маємо

$$1-2\lambda=0, \quad \lambda=\frac{1}{2}.$$

Остаточно запишемо рівняння шуканої площини:

$$2x-y+\frac{1}{2}(x+z-4)=0 \Leftrightarrow 5x-2y+z-4=0. \bullet$$

Приклад Знайти проекцію прямої, заданої рівняннями $x+2y-z+3=0,\ 2x-y+2z-1=0,$ на площину $x+y+2z-3=0$.

• Утворимо пучок площин

$$x+2y-z+3+\lambda(2x-y+2z-1)=0$$

і візьмемо в ньому таку площину, яка ортогональна до площини проектування:

$$(1+2\lambda)\cdot 1+(2-\lambda)\cdot 1+(-1+2\lambda)\cdot 2=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5}.$$

Остаточно записуємо загальне рівняння проекції:

$$3x+11y-7z+16=0,\ x+y+2z-3=0. \bullet$$

ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Дано площину

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

а також пряму з канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Знайдемо кут φ між цією прямою і заданою площиною. Обчислимо насамперед кут $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ між вектором нормалі $\mathbf{n}$ і напрямленим вектором прямої $\mathbf{s}$ (рис. 3.51).

$$\mathbf{n}=\{A, B, C\},\ \mathbf{s}=\{l, m, n\}.$$

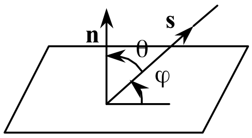


Рис. 3.51

Згідно зі співвідношенням

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$$

маємо:

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.} \qquad (1)$$

Умова паралельності площини та прямої:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}=0,\quad \boxed{Al+Bm+Cn=0}. \qquad (2)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\boxed{\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}}. \qquad (3)$$

Щоб знайти точку перетину прямої і площини, скористаємося параметричними рівняннями прямої (3) із підрозд. 3.5.6. Підставляючи x, y, z у рівняння площини, дістаємо рівняння для t:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+t(Al+Bm+Cn)=0. \qquad (4)$$

1. Якщо $Al+Bm+Cn\neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці.

2. Якщо $Al + Bm + Cn = 0$, то пряма паралельна площині. Якщо $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій не лежить на площині, то рівняння (4) не має розв'язків. При цьому пряма проходить на деякій ненульовій відстані від площини.

3. Якщо $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (4) виконується при всіх значеннях t. Усі точки на прямій належать площині.

Приклад Знайти проекцію точки $M_0(1, 2, 3)$ на площину $2x + y + 2z - 1 = 0$.

• Для розв'язування задачі достатньо з точки M_0 опустити на площину перпендикуляр і знайти точку його перетину з площиною (рис. 3.52).

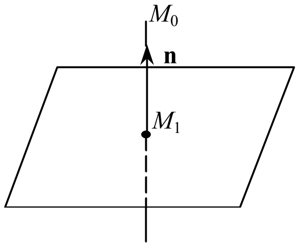


Рис. 3.52

Напрямний вектор прямої **s** колінеарний до вектора **n** нормалі до площини. Маємо $\mathbf{n} = \{2, 1, 2\}$. Отже, рівняння перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2} = t.$$

Підставивши вирази

$$x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 3 + 2t$$

у рівняння площини, дістанемо t

$$2(1 + 2t) + (2 + t) + 2(3 + 2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

З параметричних рівнянь прямої знаходимо координати точки проекції $M_1(x_1, y_1, z_1)$

$x_1 = -1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 1.$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дано дві прямі, що визначаються рівняннями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}. \qquad (1)$$

Прямі (1) паралельні**, якщо виконується умова**

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Прямі (1) взаємно перпендикулярні**, якщо**

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Кут між прямими визначається кутом θ між їх напрямними векторами:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}, \quad \cos\theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Самостійна робота № 10

Тема: Загальні рівняння прямої і площини, їх дослідження
Мета: формувати вміння та навики досліджувати рівняння прямої та площини, записувати рівняння прямої і площини

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1. Загальне рівняння прямої, його дослідження.
2. Загальне рівняння площини, його дослідження.

Практичні завдання:

1. Дано три точки A, B, C на площині. Знайти:
   - рівняння прямих AB і AC, привести їх до загального виду;
   - відстань від точки B до прямої AC

   A(2;3), B(-4;4), C(5;5)

2. Піраміда задана вершинами А, В, С, Д. Знайти:
   - рівняння площин ВСД і АСД та привести їх до загального виду;

   А(1;2;0), В(2;1;1), С(3;0;-1) ,Д(-2;-3;2)

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001, с 78, 84.

Питання для самоконтролю:

1. Назвати загальне рівняння прямої
2. Назвати частинні випадки із загального рівняння прямої
3. Назвати загальне рівняння площини
4. Назвати частинні випадки із загального рівняння площини

Теоретичні відомості

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Розглянемо на площині прямокутну систему координат x, y і знайдемо рівняння прямої, коли відомий вектор її нормалі $\mathbf{n} = \{A, B\}$ і задано точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої прямої (рис. 3.27).

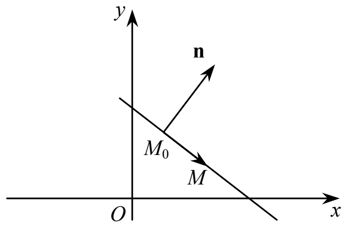


Рис. 3.27

За умовою вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \{x - x_0,\ y - y_0\}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n} = \{A, B\}$. Тому їх скалярний добуток $\mathbf{n}\mathbf{M}_0\mathbf{M} = 0$. Звідси маємо рівняння

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,} \qquad (1)$$

або

$$\boxed{\begin{aligned} &Ax + By + C = 0, \\ &C = -Ax_0 - By_0. \end{aligned}} \qquad (2)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої**.

На відміну від рівняння виду (1) змінні x, y входять до рівняння (2) рівноправно. Рівняння (1) завжди можна подати у вигляді (2).

Рівняння прямої (2) можна записати у вигляді ($y = kx + b$) лише за умови $B \neq 0$.

Коефіцієнти A, B при x, y у загальному рівнянні прямої є проекціями на координатні осі вектора її нормалі **n**.

Справджується теорема.

Теорема 1. **Будь-яка пряма на площині може бути задана лінійним рівнянням виду (2). Кожне лінійне рівняння виду (2), де $A^2 + B^2 > 0$, визначає деяку пряму.**

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше при виведенні рівняння (1). Доведемо друге твердження. Візьмемо довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 0.$$

Оскільки коефіцієнти при x, y не перетворюються одночасно на нуль, завжди знайдуться значення $x = x_0$, $y = y_0$, при яких виконується рівність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Віднімаючи ці рівняння почленно, дістаємо рівність

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \qquad (3)$$

За допомогою векторів

$$\mathbf{n} = \{A, B\},\quad \mathbf{M}_0\mathbf{M} = \{x - x_0,\ y - y_0\}$$

рівність (3) можна записати у вигляді $\mathbf{n}\mathbf{M}_0\mathbf{M} = 0$.

Як бачимо з рис. 3.27, вектор $\mathbf{M_0M}$ тоді і тільки тоді буде перпендикулярним до ненульового вектора $\mathbf{n}$, коли точка $M(x, y)$ лежить на прямій, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до цього вектора. Звідси випливає рівняння (1), що визначає деяку пряму. Отже, теорему доведено. ◆

Нехай x, y — координати довільної точки на площині. Пряма (2) поділяє всю площину на дві півплощини. В одній півплощині виконується нерівність $Ax + By + C > 0$, а в іншій — нерівність $Ax + By + C < 0$. На самій прямій маємо: $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо частинні випадки рівняння (2):

якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі x; якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі y; якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат; якщо $A = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю x; якщо $B = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю y.

Нагадаємо, що пряма проходить перпендикулярно до вектора $\mathbf{n} = \{A, B\}$.

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Виведемо рівняння площини у тривимірному просторі, узявши точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій площині і вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на площині. Ця точка належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\mathbf{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}$ (рис. 3.49).

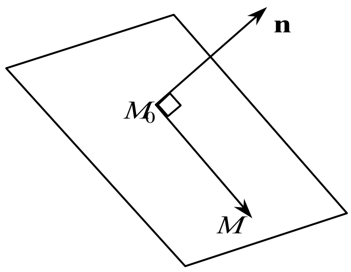


Рис. 3.49

Умова перпендикулярності вектора

$$\mathbf{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

до вектора $\mathbf{n}$ подається у вигляді

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (1)$$

Дістали *рівняння площини, що проходить через задану точку* $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Якщо позначимо сталу величину

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0, \qquad (2)$$

то рівняння (1) набере вигляду

$Ax + By + Cz + D = 0.$ Це рівняння називається **загальним рівнянням площини**.

(3)

Рівняння (3) є лінійним відносно координат x, y, z.

Справджується така теорема.

***Теорема*. Будь-яка площина у тривимірному просторі визначається лінійним рівнянням (3). Кожному лінійному рівнянню при $A^2+B^2+C^2>0$ відповідає в цьому просторі деяка площина.**

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше. Доведемо, що будь-якому лінійному рівнянню виду (3) відповідає деяка площина. Візьмемо вектор $\mathbf{n}=\{A, B, C\}$ і знайдемо числа x_0, y_0, z_0, які задовольняють рівняння

$$Ax_0+Bx_0+Cz_0+D=0. \qquad (4)$$

Розглянемо тепер дві точки* $\mathbf{M}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$, $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. *Згідно з (3) та (4) рівняння (1) можна записати у векторному вигляді:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0\mathbf{M}=0.$$

Отже, вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ перпендикулярний до вектора **n**. Це означає, що точка $M(x, y, z)$ належить площині, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна до вектора **n**. Теорему доведено. ◆

З доведення випливає, що в загальному рівнянні площини коефіцієнти A, B, C при x, y, z є проекціями вектора, перпендикулярного до площини цієї площини.

За допомогою векторів

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}, \qquad \mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$$

запишемо рівняння площини *у векторній формі*:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}+D=0,$$

або

$$\boxed{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0.}$$

Розглянемо функцію трьох змінних

$$f(x,y,z)=Ax+By+Cz+D.$$

За допомогою цієї функції увесь простір можна розбити на два півпростори: в одному виконується нерівність $f(x,y,z)>0$, а в іншому — нерівність $f(x,y,z)<0$. На площині, яка розмежовує ці підпростори, виконується рівність $f(x,y,z)=0$.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Якщо одна з координат x, y, z не входить до рівняння поверхні $f(x,y,z)=0$, то зі зміною цієї координати вид поверхні не змінюється. Така поверхня буде циліндричною із твірною, що паралельна осі, яка відповідає зазначеній координаті.

Дамо інтерпретацію загального рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0$$

в разі, якщо один або кілька його коефіцієнтів перетворюються на нуль.

1. $A=0$ — площина паралельна осі x.
2. $B=0$ — площина паралельна осі y.
3. $C=0$ — площина паралельна осі z.
4. $D=0$ — площина проходить через початок координат.
5. $A=0$, $B=0$ — площина перпендикулярна до осі z.
6. $A=0$, $C=0$ — площина перпендикулярна до осі y.
7. $B=0$, $C=0$ — площина перпендикулярна до осі x.

8. $A = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь x.
9. $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь y.
10. $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь z.
11. $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, y.
12. $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, z.
13. $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі y, z.

У загальному випадку, коли жодний із коефіцієнтів рівняння не перетворюється на нуль, рівняння площини можна звести до вигляду

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \qquad (1)$$

Площина, що визначається рівнянням (1), перетинає осі координат у точках $x = a$, $y = b$, $z = c$. Тому рівняння (1) називається **рівнянням площини у відрізках на осях.**

Приклад Зведемо рівняння площини

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

до вигляду (1). Для цього поділимо обидві його частини на 6:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 .$$

Отже, площина перетинає осі координат у точках $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$. •

Самостійна робота № 11

Тема: Неперервність функцій, властивості неперервних функцій
Мета: формувати поняття неперервності функції, точки розриву функції, властивості неперервних функцій, вміння та навики дослідженя фукцій на неперервність

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Поняття неперервності функції.
2 Точки розриву функцій.
3 Властивості неперервних функцій.
4 Дослідження функцій на неперервність.

Практичні завдання:

1. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

2. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}$ має розрив.

3. Показати, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

4. Знайти точки розриву функції $y = 1/((x-1)(x-5))$.

5. Знайти точки розриву функції $y = (x^3-6x^2+11x-6)/(x^2-3x+2)$.

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 199-204.

Питання для самоконтролю:

1 Дати визначення неперервності функції.
2 Сформулювати властивості неперервних функцій.
3 Пояснити поняття розриву першого роду.
4 Пояснити поняття розриву другого роду.
5 Навести приклади дослідження функції на неперервність.

Теоретичні відомості

1. Неперервність функції в точці і на відрізку

Нехай y = f (x) і аргумент x змінюється від значення x = x_1, до значення x = x_2. Різницю між цими значеннями аргументу називають приростом аргументу і позначають Δx .

Отже, $\Delta x = x_2 - x_1$.

При x = x_1 маємо y, = f (x_1), а при x = x_2 маємо $y_2 = f$ (x_2). Різницю функції, яка викликана зміною аргументу, називають приростом функції і позначають Δy.

Отже, $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$.

Тепер можна перейти до поняття неперервності функції. Дамо два означення неперервності функції в точці, які досить часто використовуються.

Означення 1. Якщо нескінченно малому приросту аргументу Δx в точці x = x_0 відповідає нескінченно малий приріст Δy функції, що визначена в точці x_0 та в її околі, то функцію y = f (x) називають неперервною при x = x_0 або в точці x_0.

Із цього означення випливає, що для дослідження неперервності функції в точці x = x_0 достатньо впевнитись, що при $\Delta x \to 0$ буде $\Delta y \to 0$.

Означення 2. Функцію y = f (x) називають неперервною при x = x_0, якщо:

1) f (x) існує при x = x_0 та в деякому околі точки x_0;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x);$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ незалежно від способу прямування x до x_0,

тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$

Останню умову можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} x\right] = f(x_0)$.

Ця ознака нижче буде використана для класифікації точок розриву.

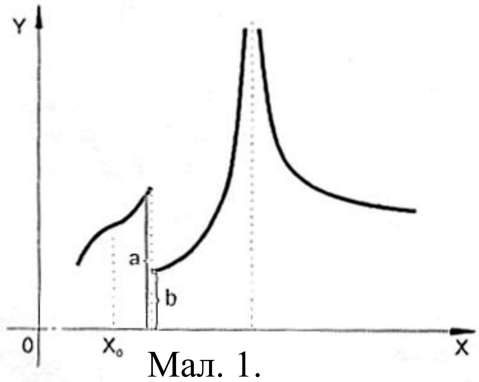
Означення 3. Якщо функція неперервна в кожній точці деякого інтервалу (a, b), то її називають неперервною в інтервалу (a, b). Якщо функція визначена при x = a і $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a),$ то кажуть, що f (x) неперервна в точці a справа.

Якщо f (a) визначена при x = b і $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b),$ то кажуть, що f (x) в точці x = b неперервна зліва.

Якщо f (x) неперервна в кожній точці інтервалу (a, b) та неперервна на кінцях інтервалу, відповідно зліва та справа, то функцію f (x) називають неперервною на відрізку [a,b].

2. Класифікація розривів функції

Якщо при деякому $x = x_1$ будь-яка із умов неперервності означення 2 не виконується, то кажуть, що функція в цій точці має розрив, а точку x_1 називають точкою розриву функції (дивись Мал. 1.).



Мал. 1.

Поняття неперервності та розриву функції можна наочно показати на графіку функції.

В околі точки x_0 графік має вигляд неперервної лінії. При будь-якому прямуванні $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$. В точках x, та x, інша ситуація. При наближенні x до x_1 зліва $f(x) \to$ a, а при $x \to$ x, справа $f(x) \to b$, тобто $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ залежить від способу прямування x до x_1. В точці x_2 умова неперервності функції також не виконується тому, що $\lim\limits_{x \to x_2} f(x) = \infty$, тобто не існує скінченної границі.

Графік функції, що зображений на Малюнку 1 має розриви в точках x_1 та x_2

Розриви функції бувають ліквідовні та неліквідовні:

1) якщо функція $f(x)$ не визначена в точці x, або визначена, але мають місце співвідношення

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_1 + 0} f(x) \neq f(x_1),$$

то розрив в точці x_1 називають **ліквідовним**. В цьому випадку функцію можна визначити або змінити її значення в точці x, так, щоб виконувались рівності

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_1 + 0} f(x) = f(x_1)$$

2) **неліквідовні** розриви поділяються на розриви першого та другого роду.

a) якщо однобічні границі функції $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x), \lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x)$ існують та скінченні, але не рівні між собою, то x_1 називають точкою розриву першого роду, а різницю $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x)$ називають стрибком функції;

b) якщо хоч би одна з однобічних границь не існує або дорівнює ∞, то розрив в цій точці називають розривом другого роду.

На Малюнку 1 функція має розрив першого роду в точці x_1, її стрибок дорівнює b - a, а в точці x_2 функція має розрив другого роди.

3. Властивості неперервних функцій та дії з ними

Приведемо без доведень властивості неперервних функцій.

Теорема 1. (Вейєрштрасса) Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку [a, b], то вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі числа M та m, що

$$m \le f(x) \le M$$

для усіх $x \in [a, b]$.

Теорема 2. Усі основні елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області існування.

Теорема 3. Алгебраїчна сума, добуток (скінченної кількості доданків та множників) та частка функцій, неперервних при $x = x_0$ (в останньому випадку дільник в цій точці не повинен дорівнювати нулю) є також неперервна функція при $x = x_0$.

Теорема 4. Неперервна функція від неперервної функції є також неперервна функція.

Теорема 5. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області існування.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

● Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою *D* функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: P_1 (1 – 0; + 0), P_2(1 + 0; + ∞). Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. 3.19. Зауважимо, що гранична точка P_2 (1 + 0; + ∞) лежить на нескінченності.

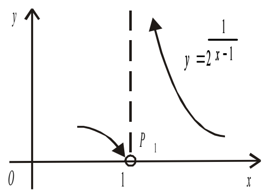


Рис. 3.19

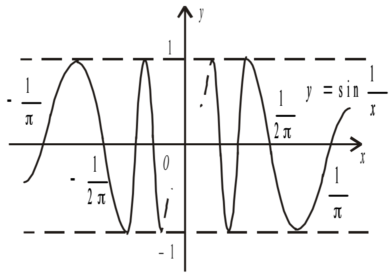


Рис. 3.20

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\sin\frac{1}{x}$.

● Ця функція буде неперервною на кожному з проміжків $(-\infty;\,0)$ і $(0;\,+\infty)$, бо є суперпозицією неперервних елементарних функцій. Границі $\lim\limits_{x\to -0}\sin\frac{1}{x}$ і $\lim\limits_{x\to +0}\sin\frac{1}{x}$ — не існують. Отже, точка $x=0$ — точка розриву функції 2-го роду.

Записати координати граничних точок графіка функції неможливо, тому і побудувати графік функції $y=\sin\frac{1}{x}$ поблизу самої точки розриву не можна (рис. 3.20).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}$.

● Скорочений запис розв'язування задачі:

$$D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty).$$

$\left.\begin{array}{l} x\in(-\infty;\;0)\\ x\in(0;\;+\infty)\end{array}\right\rangle y$ — неперервна, як суперпозиція елементарних функцій.

$x=0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x\to -0} y=\lim_{x\to -0}\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to -0\\ x^2\to +0\\ \frac{1}{x^2}\to +\infty\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}-0;$$

$$\lim_{x\to +0} y=\lim_{x\to +0}\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to +0\\ x^2\to +0\\ \frac{1}{x^2}\to +\infty\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}-0.$$

Таким чином, точка $x=0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний), бо односторонні границі існують і рівні між собою (сама функція при $x=0$ не існує).

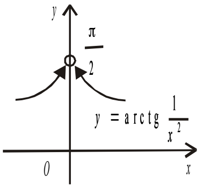


Рис. 3.21

Граничні точки графіка функції $P_1\left(-0;\,\frac{\pi}{2}-0\right)$ і $P_2\left(+0;\,\frac{\pi}{2}-0\right)$ зливаються в одну точку (рис. 3.21).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=x-\frac{x+2}{|x+2|}$.

● Після розкриття $|x+2|$ функція перепишеться так:

$$y=\begin{cases} x-\dfrac{x+2}{x+2} & \text{при } x>-2; \\ x+\dfrac{x+2}{x+2} & \text{при } x<-2 \end{cases}=\begin{cases} x-1 & \text{при } x>-2; \\ x+1 & \text{при } x<-2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty;-2)$ і $(-2;+\infty)$ функція неперервна. Розглянемо односторонні границі функції у точці $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2-0} y=\left|\begin{array}{c} (x\to -2-0)\Rightarrow \\ \Rightarrow (x<-2)\Rightarrow \\ \Rightarrow y=x+1 \end{array}\right|=\lim_{x\to -2-0}(x+1)=-1-0;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y=\left|\begin{array}{c} (x\to -2+0)\Rightarrow \\ \Rightarrow (x>-2)\Rightarrow \\ \Rightarrow y=x-1 \end{array}\right|=\lim_{x\to -2+0}(x-1)=-3+0.$$

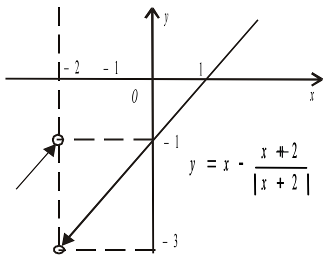


Рис. 3.22

Отже, точка $x=-2$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний), бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.

Граничні точки графіка функції такі: $P_1(-2-0;\ -1-0)$, $P_2(-2+0;\ -3+0)$ (рис. 3.22).

1. $(c)'=0.$
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad (u^{\alpha})'_x=\alpha u^{\alpha-1}u'_x.$
3. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sqrt{u})'_x=\dfrac{u'_x}{2\sqrt{u}}.$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}, \quad \left(\dfrac{1}{u}\right)'_x=-\dfrac{u'_x}{u^2}.$
5. $(\sin x)'=\cos x, \quad (\sin u)'_x=\cos u\cdot u'_x.$
6. $(\cos x)'=-\sin x, \quad (\cos u)'_x=-\sin u\cdot u'_x.$
7. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{tg} u)'_x=\dfrac{u'_x}{\cos^2 u}.$
8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} u)'_x=-\dfrac{u'_x}{\sin^2 u}.$
9. $(a^x)'=a^x\ln a, \quad (a^u)'_x=a^u\ln a\cdot u'_x, \; a>0, \; a\neq 1.$
10. $(e^x)'=e^x, \quad (e^u)'_x=e^u\cdot u'_x.$
11. $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}, \quad (\ln|u|)'_x=\dfrac{u'_x}{u}.$
12. $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}, \quad (\log_a|u|)'_x=\dfrac{u'_x}{u\ln a}, \; a>0, \; a\neq 1.$
13. $(\arcsin x)'_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arcsin u)'_x=\dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}.$
14. $(\arccos x)'_x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos u)'_x=-\dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}.$
15. $(\operatorname{arctg} x)'_x=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arctg} u)'_x=\dfrac{u'_x}{1+u^2}.$
16. $(\operatorname{arcctg} x)'_x=-\dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} u)'_x=-\dfrac{u'_x}{1+u^2}.$

Самостійна робота № 13

Тема: Диференціювання складної функції
Мета: набуття навиків диференціювання складних функцій

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Диференціювання складної функції

Практичні завдання:
Знайти похідні функцій:

1) $f(x) = e^{x^2+3x+4}$
2) $f(x) = \ln(x^3 + 3x + 5)$
3) $f(x) = e^{\cos x}$
4) $f(x) = \ln\sin x$
5) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$
6) $f(x) = (x^2 + 3)^7$
7) $f(x) = \ln\sqrt{x}$
8) $f(x) = \sin x^2$
9) $f(x) = \cos 3x$
10) $f(x) = tg\dfrac{x}{2}$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов -М.:Наука, 1990, с 211-213.

Питання для самоконтролю:
1 Яка функція називається складною.
2 Формула для обчислення похідної складної функції.

Теоретичні відомості

ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$ **:**

$$y' = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x) \text{ — правило ланцюга.}$$

Доведення. Позначимо $u = \varphi(x)$. Тоді $y = f(u)$. Знайдемо прирости функцій $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$:

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x);$$
$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Далі запишемо диференціальне відношення (1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\Delta x} =$$
$$= \frac{f(\varphi(x) + \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)) - f(\varphi(x))}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Коли $\Delta x \to 0,$ то й $\Delta u \to 0$. Тому

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{df}{du}\frac{d\varphi}{dx} = f'(u)\varphi'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x). \ \blacklozenge$$

Приклад

Задана функція $y = f(x)$. Знайти y'.

1) $y = \sqrt{x^5 - 10^x}$; 2) $y = \cos^3(\ln 2x)\operatorname{tg}\frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}$.

• 1) За формулою (5) маємо:

$$g(x) = u = x^5 - 10^x; \ f(u) = \sqrt{u};$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(5x^4 - 10^x \ln 10) = \frac{5x^4 - 10^x \ln 10}{2\sqrt{x^5 - 10^x}}.$$

2) Візьмемо: $u = \cos^3(\ln 2x)$, $v = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$. Тоді за правилом 4

$$y' = (\cos^3 \ln 2x)' \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{x} + \cos^3(\ln 2x)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)'.$$

Функції $\cos^3 \ln 2x$ і $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ — складні. Згідно з (5) маємо:

$$(\cos^3(\ln 2x))' = 3\cos^2(\ln 2x) \cdot (\cos(\ln 2x))' =$$
$$= 3\cos^2(\ln 2x)(-\sin\ln 2x)(\ln 2x)' = -3\cos^2(\ln 2x)\sin\ln 2x \frac{1}{2x} \cdot 2.$$
$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}.$$

3) Нехай $u = \operatorname{arctg} x^3$ і $v = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Тоді за правилом 5 дістаємо:

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg} x^3)'\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \operatorname{arctg} x^3(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'}{\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

Похідні функцій $\operatorname{arctg} x^3$ і $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ обчислюємо за формулою (5):

$$(\operatorname{arctg} x^3)' = \frac{1}{1+(x^3)^2}(x^3)' = \frac{3x^2}{1+x^6};$$

$$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{1+x^2})' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \ \blacklozenge$$

Самостійна робота № 14

Тема: Знаходження найбільшого та найменшого значень функції
Мета: набуття навиків знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Найбільше та найменше значення функції на проміжку

Практичні завдання:
Найбільше та найменше значення функції на заданих проміжках:

1) $y = x^2 - 6x + 13$, x є $[0;6]$

3) $y = 6x^2 - x^3$, x є $[-1;6]$

2) $y = 8 - 0.5x^2$, x є $[-2;2]$

4) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, x є $[1;3]$

5) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, x є $[-4;4]$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов -М.:Наука, 1990, с 236-240.

Питання для самоконтролю:
1 Знаходження критичних точок на даному проміжку.
2 Знаходження функції в даній точці.

3 Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку.

Теоретичні відомості

Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$, диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ **на проміжку** $[a;\ b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a;\ b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).
2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a;\ b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов’язково виясняти, чи буде в них екстремум).
3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$.

Приклад Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 5x + \dfrac{1}{5x}$ на проміжку [0,01; 100].

● У даному випадку похідна $f'(x) = \dfrac{25x^2 - 1}{5x}$ в інтервалі [0,01; 100] має тільки один корінь — $x = 0{,}2$. Обчислимо значення функції в стаціонарній точці $x = 0{,}2$ і на кінцях проміжку [0,01; 100]:

$$f(0{,}2) = 2,\ f(0{,}01) = f(100) = 100{,}01.$$

Звідси

$$\max_{x\in[0{,}01;100]} f(x) = 100{,}01, \quad \min_{x\in[0{,}01;100]} f(x) = 2.$$

Самостійна робота № 15

Тема: Дослідження функцій та побудова їх графіків
Мета: набуття навиків дослідження та побудови графіків функцій

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Побудова графіків функцій із застосуванням похідної

Практичні завдання:
Побудувати графіки функцій
1) $y = x^2 - 8x + 12$

2) $y = x^2 - 4x$

3) $y = x^3 - 3x^2$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумс -М.:Наука, 1990, с 232-236.

Питання для самоконтролю:
1 Алгоритм дослідження функції із застосуванням похідної

Теоретичні відомості

Тема: Побудова графіків функцій із застосуванням похідної

Алгоритм дослідження функції із застосуванням похідної

1) знайти область визначення функції та множину її значень;
2) дослідити функцію на парність та непарність, періодичність;
3) знайти точки перетину графіка функції з осями системи координат, точки розриву, проміжки знакосталості функції;
4) дослідити поводження функції біля точок розриву та на нескінченності, знайти якщо вони є, асимптоти графіка;
5) знайти нулі та точки розриву похідної, інтервали монотонності функції, точки екстремуму та екстремальні значення функції;
6) знайти нулі та точки розриву другої похідної, інтервали опуклості графіка функції, точки перегину та значення функції в цих точках;
7) побудувати графік функції, використовуючи результати досліджень.

Наприклад, побудувати графік функції $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

1) Область визначення функції f:

x $\in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) Функція парна. Тому її графік симетричний відносно осі ординат.

3) Функція не є періодичною. Це випливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

4) Графік функції перетинає вісь ординат у точці (0;1). Нулі функції відсутні. Отже, графік функції не перетинає вісь абсцис.

5) Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки. Для цього знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+4)}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2};$$

$$\frac{-16x}{(x^2-4)^2} = 0;$$

x=0–критична точка.

Для $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;0)$ $f'(x) > 0$. Отже, на цих проміжках функція зростає. Оскільки функція парна, то на проміжках $(0;2) \cup (2;+\infty)$ вона спадає. Тоді точка x=0 є точкою локального максимуму. Знайдемо його значення

$$f(0) = -1.$$

6) Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину:

$$f''(x) = -16[\frac{x}{(x^2 - 4}$$

$$= -16\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3} = 16\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}.$$

На проміжках $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вниз. На проміжку $(-2;2)$ $f''(x) < 0$, а тому графік функції опуклий вгору.

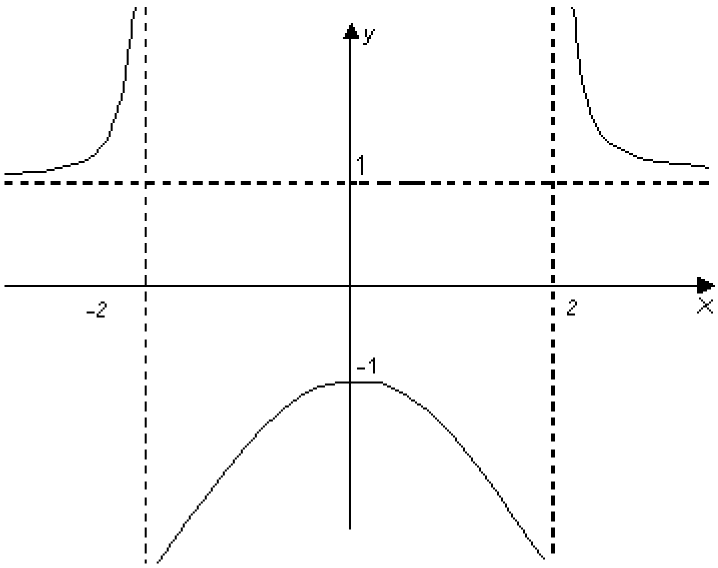
Точки перегину відсутні.

7) Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4} = 1$, то пряма y=1 є горизонтальною асимптотою для графіка функції.

Дослідимо поведінку функції біля точок x=2, x=-2:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty.$$

Отже, в точці x=2 функція має розрив другого роду, а пряма x=2 є вертикальною асимптотою. Враховуючи парність функції, робимо висновки, що пряма x=-2 також є вертикальною асимптотою.



Самостійна робота № 16

Тема: Таблиця основних невизначених інтегралів
Мета: формувати вміння та навики знаходження невизначених інтегралів застосовуючи таблицю основних невизначених інтегралів

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Таблиця основних невизначених інтегралів

Практичні завдання:
Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$

4) $\int \cos x dx$

2) $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$

5) $\int \sin x dx$

3) $\int (5x^2 - 2x + 1)dx$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990, с 251-252.

Питання для самоконтролю:

1 Назвати формули знаходження невизначених інтегралів.

2 Навести приклади знаходження невизначених інтегралів.

Теоретичні відомості

Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right)$;
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;
3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$;
4. $\int e^{u} du = e^{u} + C$;
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$;
6. $\int \cos u du = \sin u + C$;
7. $\int tgu du = -\ln|\cos u| + C$;
8. $\int ctgu du = \ln|\sin u| + C$;
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$;
11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$;
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$;
15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$;
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

Самостійна робота № 17

Тема: Безпосереднє обчислення невизначеного інтеграла

Мета: формувати вміння та навики знаходження невизначених інтегралів, які зводяться до табличних

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Безпосереднє обчислення невизначеного інтеграла

Практичні завдання:

Обчислити невизначений інтеграл:

1) $\int \frac{1-6x+4x^2}{x}dx$

2) $\int x^2(x-2)dx$

3) $\int \sqrt[5]{x}dx$

4) $\int \frac{dx}{6x}$

5) $\int \frac{3x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

6) $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}dx$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика дл; техникумов. -М.:Наука, 1990, с 253-255.

Питання для самоконтролю:

1 Дати визначення первісної функції. Навести приклади

2 Дати визначення невизначеного інтегралу

3 Пояснити суть геометричного змісту невизначного інтеграла

4 Сформулювати основні властивості невизначеного інтеграла

5 Записати формули невизначених інтегралів

Теоретичні відомості

Метод інтегрування, при якому даний інтеграл шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції (або виразу) і застосування властивостей невизначеного інтеграла зводиться до одного або декількох табличних інтегралів, називається ***безпосереднім інтегруванням.***

При зведенні даного інтеграла до табличного часто використовуються наступні перетворення диференціала (операція «приведення під знак диференціала»):

$du = d(u + a)$, a – число

$du = \frac{1}{a} d(au)$, $a \neq 0$ – число

$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2)$,

$\cos u du = d(\sin u)$,

$\sin u du = -d(\cos u)$,

$\frac{1}{u} du = d(\ln u)$,

$\frac{1}{\cos^2 u} = d(tgu)$.

Взагалі, $f'(u)du = d(f(u))$, ця формула дуже часто використовується при обчисленні інтегралів.

Приклади:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$;

2) $\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$;

3) $\int ctg^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -ctgx - x + C$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C$;

5) $\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 12x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x dx =$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos 12x d(12x) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{24} \sin 12x + C$;

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3} \int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)} dx =$

$= -\frac{1}{3} \int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} dx =$

$= -\frac{1}{3} \int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{d(x-1)}{x-1} =$;

$= -\frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C$

7) $\int tgu du = \int \frac{\sin u du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$;

8) $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du =$

$= \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du + \int \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}du =$

$= \int ctg\frac{u}{2}d\left(\frac{u}{2}\right) + \int tg\frac{u}{2}d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C =$

$= \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$;

9) $\int x(x+2)^9dx = \int(x+2-2)(x+2)^9dx = = \int(x+2)^{10}dx - 2\int(x+2)^9dx =$

$= \int(x+2)^{10}d(x+2) - 2\int(x+2)^9dx(x+2) =$

$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$;

10) $\int\frac{dx}{ctg^5x\cdot\sin^2x} = -\int(ctgx)^{-5}d(ctgx) = -\frac{ctg^{-4}x}{-4} + C = = \frac{1}{4ctg^4x} + C$;

11) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int\frac{d(x-1)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(x-1)^2}} = = \ln\left|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}\right| + C$

12) $\int\left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)dx = = 4\int x^3dx - \frac{5}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x}d(1-x) =$

$= x^4 - \frac{5}{2}tg2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$;

13) $\int x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^2}dx = \int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot x\cdot(x^2+1-1)dx =$

$= \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{4}{3}}d(1+x^2) - -\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2) = = \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

Як бачимо, обчислення інтегралів іноді вимагає деякої винахідливості, так би мовити, «індивідуального підходу до кожної підінтегральної функції».

Відповідні навички отримуються в результаті значного числа вправ.

Самостійна робота № 18

Тема: Інтегрування заміною змінної та частинами

Мета: формувати вміння та навики знаходження невизначеного інтеграла методом заміною змінної та інтегрування частинами

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1. Інтегрування заміною змінної.
2. Інтегрування частинами.

Практичні завдання:

Обчислити інтеграли:

1) $\int (9 - x)^8 dx$

2) $\int \sin^4 x \cos x dx$

3) $\int x \cos x dx$

4) $\int x e^x dx$

5) $\int (x + 7)^5 dx$

6) $\int x \ln x dx$

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. –М.: Наука, 1990, с 255-266.

Питання для самоконтролю:

1 Пояснити суть методу знаходження невизначеного інтеграла методом заміни змінної.

2 Пояснити суть методу знаходження невизначеного інтеграла частинами.

3 Вказати типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами.

Теоретичні відомості

Метод інтегрування підстановкою (заміна змінної)

Інтегрування методом підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування (тобто підстановкою). При цьому заданий інтеграл приводиться до нового інтеграла, який є табличним або таким, що зводиться до нього (у разі «вдалої підстановки»). Загальних методів підбору підстановок не існує. Уміння правильно визначити підстановку отримується практикою.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Зробимо підстановку $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – функція, що має неперервну похідну.

Тоді $dx=\varphi'(t)dt$ і на підставі властивості інваріантності формули інтеграції невизначеного інтеграла отримуємо *формулу інтегрування підстановкою*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) також називається ***формулою заміни змінних*** в невизначеному інтегралі. Після знаходження інтеграла правої частини цієї рівності слід перейти від нової змінної інтеграції t назад до змінної x.

Іноді доцільно підбирати підстановку у вигляді $t=\varphi(x)$, тоді $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$, де $t=\varphi(x)$. Іншими словами, формулу (2.1) можна застосовувати справа наліво.

Приклад 1. Знайти $\int e^{\frac{x}{4}}dx$.

Покладемо $x=4t$, тоді $dx=4dt$. Отже $\int e^{\frac{x}{4}}dx=4\int e^{t}dt=4e^{t}+C=4e^{\frac{x}{4}}+C$.

Приклад 2. Знайти $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$.

Нехай $\sqrt{x-3}=t$, тоді $\sqrt{x-3}=t$, $dx=2tdt$. Тому

$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx=\int(t^3+3)\cdot t\cdot 2tdt=$

$$=2\int(t^4+3t^2)dt=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C==\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Приклад 3. Отримати формулу $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C$.

Позначимо $t=\sqrt{u^2+a^2}+u$ (підстановка Ейлера). Тоді $dt=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}du+du$,

тобто $dt=\frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}du$.

Звідси

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u}=\frac{dt}{t}.$$

Отже

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C.$$

Приклад 4. Знайти $\int x\cdot(x+2)^{100}dx$.

Нехай $x+2=t$. Тоді $x=t-2$, $dx=dt$. Маємо:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}dx=\int(t-2)\cdot t^{100}dt=\int t^{101}dt-2\int t^{100}dt=$$

$$=\frac{t^{102}}{102}-2\cdot\frac{t^{102}}{101}+C=\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C.$$

Приклад 5. Знайти $\int\frac{dx}{e^x+1}$.

Позначимо $e^x=t$. Тоді $x=\ln t$, $dt=\frac{dt}{t}$. Отже

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{dt}{t^2+t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right|+$$

$$+C=-\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right|=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

Тут використовується формула 16 таблиці основних інтегралів.

Метод інтегрування частинами

Нехай $u=u(x)$ і $\upsilon=\upsilon(x)$ - функція, що має неперервні похідні. Тоді $d(u\upsilon)=u\cdot d\upsilon+\upsilon\cdot du$. Проінтегрувавши цю рівність, отримаємо

$$\int d(u\upsilon)=\int u d\upsilon+\int\upsilon du \quad \text{або} \quad \int u d\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du$$

Отримана формула називається ***формулою інтегрування частинами***. Вона дає можливість звести обчислення інтеграла $\int u d\upsilon$ до обчислення інтеграла $\int\upsilon du$, який може виявитися істотно простішим за початковий.

Інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз заданого інтеграла представляється яким-небудь чином у вигляді добутку двох співмножників u і dv (це, як правило, можна здійснити декількома способами); потім, після знаходження v і du використовується формула інтегрування частинами. Іноді цю формулу потрібно використовувати кілька разів.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1 Інтеграл вигляду $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\cdot\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ - многочлен, k – число. Зручно покласти $u=P(x)$, а за dv позначити решту співмножників.

2 Інтеграли вигляду $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx,$ $\int P(x)arcctgxdx$. Зручно покласти $P(x)dx=d\upsilon$, а за u позначити решту співмножників.

3 Інтеграли вигляду $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx, \int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, де a і b – числа. За u можна прийняти функцію $u=e^{ax}$.

Приклад 6. Знайти $\int(2x+1)e^{3x}dx$.

Нехай $\begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ d\upsilon = e^{3x}dx \Rightarrow \upsilon = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$ (можна покласти $C = 0$). Отже, по формулі інтегрування частинами:

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2dx == \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Приклад 7. Знайти $\int \ln x dx$.

Нехай $\begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ d\upsilon = dx \Rightarrow \upsilon = x \end{bmatrix}$. Тому

$$\int \ln x dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln x - x + C.$$

Приклад 8. Знайти $\int x^2 e^x dx$.

Нехай $\begin{bmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ d\upsilon = e^x dx \Rightarrow \upsilon = e^x \end{bmatrix}$. Тому

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int e^x \cdot xdx. \qquad (2.2)$$

Для обчислення інтеграла $\int e^x xdx$ знову застосуємо метод інтегрування частинами: $u = x, d\upsilon = e^x dx \Rightarrow du = dx, \upsilon = e^x$. Значить

$$\int e^x \cdot xdx = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C. \qquad (2.3)$$

Тому (див. (2.2)) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x\cdot e^x - e^x + C)$.

Приклад 9. Знайти $\int arctgx dx$.

Нехай $\begin{bmatrix} u = arctgx \Rightarrow d\upsilon = \frac{1}{1+x^2}dx \\ d\upsilon = dx \Rightarrow \upsilon = x \end{bmatrix}$. Тому

$$\int arctgxdx = x\cdot arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} == xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Самостійна робота № 19

Тема: Обчислення визначеного інтеграла
Мета: формувати вміння та навики обчислення визначеного інтеграла

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Властивості визначеного інтеграла.
2 Формула Ньютона-Лейбніца.

Практичні завдання:

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$

2) $\int_{-1}^{1} x^4 dx$

5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2dx}{\sin^2 x}$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

6) $\int_{0}^{1} \sqrt[5]{x} dx$

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М. Наука, 1990, с 267-289.

Питання для самоконтролю:

1 Пояснити поняття визначеного інтеграла.

2 Назвати властивості визначеного інтеграла.

3 За якою формулою обчислюється визначений інтеграл?

Теоретичні відомості

Поняття визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування, формула Ньютона—Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\varPhi(x)=\int\limits_a^x f(x)dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування. Змінній x надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції.

$$\Delta\varPhi=\varPhi(x+\Delta x)-\varPhi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \text{ (рис. 7.7)}$$

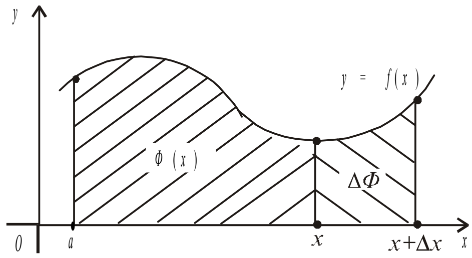


Рис. 7.7

Теорема 8. **Якщо функція *f*(*x*) неперервна для будь-якого $x\in[a;\ b]$, то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто**

$$\varPhi_x'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)_x'=f(x). \qquad (7.10)$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;\ b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто

$$\varPhi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$$

Приклад. Знайти $\int\frac{\sin x}{x}dx,\ x\in[1;+\infty)$.

● Функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ — неперервна на проміжку $[1;+\infty)$, тому $\int\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_1^x\frac{\sin t}{t}dt+C, \forall x\in[1;+\infty).$

Теорема 9. **(Ньютона—Лейбніца). Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x\in[a;\ b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто**

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a), \text{ де } F'(x)=f(x). \quad (7.11)$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x)+C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b \qquad (7.12)$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

Приклад. $\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^{\ln 2} =$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2}-1\right)^5 - \left(e^0-1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5-(1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$$

Самостійна робота № 20

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної і частинами

Мета: формувати вміння та навики знаходження визначеного інтеграла методом заміною змінної та інтегрування частинами

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1. Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної.
2. Обчислення визначеного інтеграла частинами.

Практичні завдання:

Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{2+\sin x}$

4) $\int_e^4 x\ln x dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

5) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

3) $\int_0^1\frac{6x^2 dx}{1+2x^3}$

6) $\int_{-1}^1 (x+4)^2 dx$

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М. Наука, 1990, с 279-283.

Питання для самоконтролю:

1 Пояснити поняття визначеного інтеграла?

2 Пояснити метод обчислення визначного інтеграла заміною змінної.

3 Навести приклади обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної.

4 Пояснити метод обчислення визначного інтеграла частинами.

5 Навести приклади обчислення визначеного інтеграла частинами.

Теоретичні відомості

Метод підстановки у визначеному інтегралі

***Теорема 1*. Якщо: 1) $f(x)$ — неперервна для $x \in [a;\ b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) $x = \varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ — неперервні для $t \in [\alpha;\ \beta]$; 4) при $t \in [\alpha;\ \beta] \Rightarrow x \in [a;\ b]$, то**

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (7.13)$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2,\ \ dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

***Теорема 2*. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a;\ b]$, то**

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (7.14)$$

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi \right) - \left(0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Самостійна робота № 21

Тема: Обчислення довжини дуги кривої

Мета: формувати вміння та навики обчислювати довжину дуги кривої застосовуючи визначений інтеграл

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Обчислення довжини дуги кривої.

Практичні завдання:

Обчислити:

1) Довжину дуги параболи $y=x^2+2$ між точками O(0;0) і A(2;6).
2) Довжину дуги кривої $y^2=(x-1)^3$ між точками A(2;-1) і B(5;-8).

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 299-300.

Питання для самоконтролю:

1 Дати визначення довжини дуги кривої.
2 Записати формулу для обчислення довжини дуги кривої.
3 Навести приклади обчислення довжини дуги кривої.

Теоретичні відомості

Довжина дуги кривої

Нехай у прямокутних координатах на площині задано криву рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$ функції.

Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 2.12).

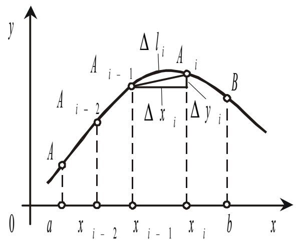


Рис. 2.12

Нагадаємо означення довжини дуги кривої.

Візьмемо на дузі AB точки $A, A_1, A_2, \ldots, B$ з абсцисами $a = x_0$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ і проведемо хорди AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots \Delta l_n$. Тоді дістанемо ламану $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$, вписану в другу AB. Довжина ламаної дорівнює $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Означення. **Довжиною l дуги AB** називається границя, до якої прямує довжина вписаної в цю дугу ламаної, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля:

$$\boxed{l = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i. \qquad (1)}$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2)}$$

● Доведемо формулу (2). Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

За теоремою Лагранжа про середнє значення маємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Таким чином, довжина вписаної в дугу ламаної набирає вигляду:

$$l_n = \sum_{i-1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

За умовою $f'(x)$ — неперервна, тому функція $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ також неперервна. Отже, існує границя інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i =$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Приклад Обчислити довжину півкубічної параболи $y = (x+1)^{3/2}$, $-1 \le x \le 4$.

● За формулою (2) маємо:

$$l = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{9x+13}dx =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(9x+13)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{4} = \frac{1}{27}(9\cdot 4+13)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27}(-9+13)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}\cdot(49)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27}(4)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= \frac{1}{27}\cdot 7^3 - \frac{1}{27}\cdot 8 = \frac{343}{27} - \frac{8}{27} = \frac{335}{27}.$$

Самостійна робота № 22

Тема: Обчислення об'ємів тіл обертання
Мета: формувати вміння та навики обчислювати об´єми тіл обертання застосовуючи визначений інтеграл

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Обчислення об'ємів тіл обертання.

Практичні завдання:
1 Знайти об´єм тіла, яке утворилось обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y^2=4x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$.
2 Знайти об´єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y=2$ і $y=x^2+1$.

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 295-298.

Питання для самоконтролю:

1. Записати формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.
2. Навести приклади обчислення об'ємів тіл обертання.

Теоретичні відомості

Об’єм тіла обертання

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі x криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю x і прямими $x = a$, $x = b$.

У цьому разі довільний переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є коло, площа якого $Q = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$.

Застосовуючи (40), дістаємо формулу для обчислення об’єму тіла обертання:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (1)}$$

Приклад

Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням лінії

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

навколо осі Ox на проміжку від 0 до b (рис. 2.15).

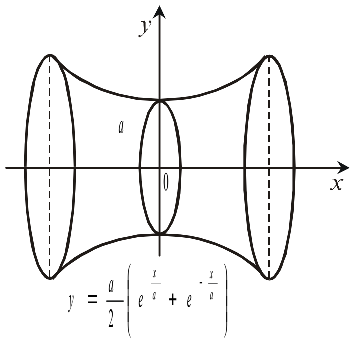


Рис. 2.15

• За формулою (1) маємо:

$$V = \pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx = \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b =$$

$$= \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2} = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

Самостійна робота № 23

Тема: Обчислення площі поверхні обертання
Мета: формувати вміння та навики обчислювати площі поверхні тіл обертання застосовуючи визначений інтеграл

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Обчислення площі поверхні обертання.

Практичні завдання:
1 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кубічної параболи $y=x^3$, обмеженої точками O(0;0) і A(2/3;8/27).
2 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y^2=2x$, обмеженої точками O(0;0) і A(1,5; $\sqrt{3}$).

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул ГД. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 301-302.

Питання для самоконтролю:

1 Дати визначення площі поверхні обертання.
2 Записати формулу для обчислення площі поверхні обертання.
3 Навести приклади обчислення площі поверхні обертання.

Площа поверхні, описаної ламаною, подається у вигляді

Теоретичні відомості

Площа поверхні тіла обертання

Нехай задано поверхню, утворену обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі x. Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $a \le x \le b$. Функції $f(x)$, $f'(x)$ неперервні, якщо $x \in [a; b]$.

Проведемо хорди $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$, довжини яких позначимо Δl_1, $l_2, \ldots, \Delta l_n$ (рис. 2.16).

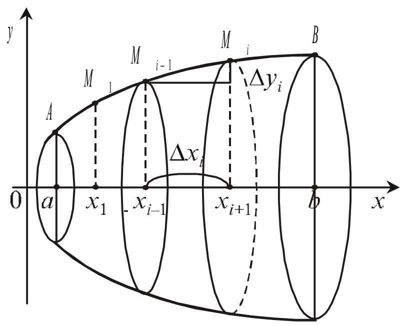


Рис. 2.16

Кожна хорда завдовжки $\Delta l_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ під час обертання описує зрізаний конус, площа поверхні якого така:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i .$$

Але $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)} \Delta x_i .$

Застосовуючи теорему Лагранжа, маємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i).$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i ,$$

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i .$$

$$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i ,$$

або

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i . \qquad (42)$$

Означення. Границя суми (42), коли найбільша ланка ламаної Δl_i прямує до нуля, називається **площею поверхні обертання**.

Сума (42) за своєю побудовою не є інтегральною сумою для функції

$$2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}. \qquad (43)$$

Але можна довести, що границя суми (42) дорівнює границі інтегральної суми для функції (43):

$$S_{\text{поверхні}} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} \Delta x_i =$$
$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} \Delta x_i ,$$

або

$$\boxed{S_{\text{поверхні}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx. \qquad (44)}$$

Приклад Визначити площу поверхні параболоїда, утвореного обертанням навколо осі x дуги параболи $y^2 = 2px$, $0 \le x \le a$.

$$f(x) = \sqrt{2px}, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}.$$

Самостійна робота № 24

Тема: Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними
Мета: формувати вміння та навики розв´язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.

Практичні завдання:

1. Знайти загальний розв’язок дифрівнянь:

а) $2yy'=1-3x^2$
б) $(1+y)dx-(1-x)dy=0$
в) $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)by$

2. Знайти частинні розв´язки дифрівнянь:

а) $2yy'=1-3x^2$, якщо $y(1)=3$
б) $x^2dx+ydy=0$, якщо $y(0)=1$
в) $(1+x)ydx=(1-y)xdy$, якщо $y(1)=1$

Література:

Валуце І.І., Ділігул Г.Д. Математика для технікумів.-М. :Наука 1990, с 321-327.

Питання для самоконтролю:

1Дати визначення диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.

2Приклади розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.

Теоретичні відомості

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y). \qquad (7)$$

де $y(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)\ f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\,dx-(y + yx^2)\,dy = 0.$$

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1+ y^2)dx-y(1+x^2)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1 + x^2)\ (1 + y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \text{ або } \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$\ln(1+x^2) = \ln(1 + y^2) + \ln|C|$, $C \neq 0$. Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \quad C \neq 0$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2y)\,dy = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x + 1)dx + x^2(1 - y)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2y^2 \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx + \int\frac{y+1}{y^2}dy = C, \quad C \in R,$$

або

$$\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

звідки

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Самостійна робота № 25

Тема: Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів: Даламбера та Коші
Мета: формувати вміння та навики досліджувати ряди на збіжність за ознакою Даламбера та Коші

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Ознака Даламбера збіжності знакододатніх рядів.
2 Ознака Коші збіжності знакододатніх рядів.

Практичні завдання:

Дослідити ряди на збіжність:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990, с 410-414.

Питання для самоконтролю:

1 Сформулювати ознаку Даламбера збіжності знакододатніх рядів.

2 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Даламбера.

3 Сформулювати ознаку Коші збіжності знакододатніх рядів Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Коші.

Теоретичні відомості

Т е о р е м а. Ознака Коші збіжності числового ряду.

Нехай для будь-якого n≥1 і $a_n \geq 0$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$,

Тоді:
1) якщо p<1, то ряд (1) - збіжний;
2) якщо p>1, то ряд (1) - розбіжний;
3) якщо p=1, то ряд треба досліджувати додатково.

Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) – розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{n+1}\right)^n$

$a_n = \left(\frac{4n}{n+1}\right)^n$, $p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{n+1}\right) = 4 > 1$, ряд розбіжний

Т е о р е м а. Даламбера збіжності числового ряду.

Нехай для будь-якого n≥1 і $a_n \geq 0$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), існує $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$=p

Тоді:
1) якщо p<1, то ряд (1) - збіжний;
2) якщо p>1, то ряд (1) - розбіжний;
3).якщо p=1, то ряд треба досліджувати додатково.

Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) – розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n = \frac{2^n}{n!} > 0$. Побудуємо $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \; = \frac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \, 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ збігається.

Самостійна робота № 26

Тема: Дослідження рядів на збіжність

Мета: формувати вміння та навики досліджувати ряди на збіжність за ознакою порівнянь, за необхідною умовою збіжності числових рядів

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Дослідження рядів на збіжність за необхідною умовою збіжності числових рядів.

2 Дослідження рядів на збіжність за ознакою порівнянь.
3 Дослідження рядів на збіжність за ознакою Даламбера.
4 Дослідження рядів на збіжність за ознакою Коші.

Практичні завдання:

Дослідити ряди на збіжність:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990, с 410-414.

Питання для самоконтролю:

1 Сформулювати необхідну умову збіжності числових рядів.
2 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за допомогою необхідної умови збіжності числових рядів.
3 Сформулювати ознаку порявнянь.
4 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою порівнянь.
5 Сформулювати ознаку Даламбера збіжності знакододатніх рядів.
6 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Даламбера.
7 Сформулювати ознаку Коші збіжності знакододатніх рядів.
8 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Коші.

Теоретичні відомості

Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} = u_n$ з додатними членами $u_n > 0,\ u_2 > 0, \ldots,$ $u_n > 0, \ldots$. Частинні суми ряду (9.2) утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$.

Теорема 1 (основна). **Для того щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.**

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами розбігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Теорема. 2 (ознака порівняння рядів). **Якщо для рядів з додатними членами:**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (9.6)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (9.7)$$

виконується умова $v_n \geq u_n$, то:

а) із збіжності ряду (9.7) випливає збіжність ряду (9.6);

б) із розбіжності ряду (9.6) випливає розбіжність ряду (9.7).

Означення. Якщо для рядів (9.6), (9.7) виконується умова $u_n \leq v_n$, то ряд (9.7) називається *мажорантним* відносно ряду (9.6), а ряд (9.6) — *мінорантним* відносно ряду (9.7).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n!} > 0$. Зауважимо, що

$$\left(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1} \right) \Rightarrow \left(u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = v_n \right).$$

Ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q = 0{,}5 < 1$.

Значить, за ознакою порівняння (теорема 9.7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ — збігається.

Теорема 3. (ознака порівняння в граничній формі). **Якщо для рядів з додатними членами (9.6), (9.7) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \quad (0 < c < +\infty)$, то ряди (9.6) і (9.7) збігаються або розбігаються разом.**

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3 + 10n + 20}}$.

● Загальний член ряду $u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3 + 10n + 20}}$ являє собою алгебраїчний вираз. Для того щоб цілеспрямовано вибрати ряд порівняння, побудуємо величину, еквівалентну u_n при $n \to \infty$

$u_n = \sqrt{\dfrac{n+5}{n^3+10n+20}} \sim \sqrt{\dfrac{n}{n^3}} = \dfrac{1}{n} = v_n$. Вибираємо ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ — гармонічний ряд, він є розбіжним. Обчислюємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{10}{n^2}+\dfrac{20}{n^3}}} = 1 \quad (0 < 1 < +\infty).$$

За ознакою порівняння (теорема 9.8) буде розбіжним і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

Теорема 4. (ознака Даламбера). **Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тоді:**

при $l < 1$ ряд збігається;
при $l > 1$ ряд розбігається;
при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n = \dfrac{2^n}{n!} > 0$. Побудуємо $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \; = \dfrac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0 < 1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ збігається.

Теорема 5. (ознака Коші (радикальна)). **Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, тоді:**

при $l < 1$ ряд збігається;
при $l > 1$ ряд розбігається;
при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

● Загальний член ряду $u_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n} > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3-\dfrac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1.$$

Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії (9.6) або ряд Діріхле (9.8).

4. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.

5. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}=\frac{1^3}{e}+\frac{2^3}{e^2}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots;\quad u_n=\frac{n^3}{e^n}>0\Rightarrow$ ряд знакододатний.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix} n\sim x \\ n\to\infty \\ x\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'''}{(e^x)'''}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2\cdot 1}{e^x}=0\Rightarrow$

необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

3) Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{e}<1\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ за ознакою Даламбера збігається.