

**Міністерство освіти і науки України  
Чернігівський промислово-економічний коледж  
Київського національного університету технологій та дизайну**

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА ТА ДЕТАЛІ ВУЗЛІВ ЗАСОБІВ  
АВТОМАТИЗАЦІЇ**

**Конспект лекцій  
для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та  
комп'ютерно-інтегровані технології»**

**Чернігів 2018**

Технічна механіка та деталі вузлів засобів автоматизації. Конспект лекцій для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»/ Уклав викладач Савчук А.М. – Чернігів: ЧПЕК КНУТД, 2018. - 54с.

Рецензент: Седлеш Ю.Б., викладач ВК циклової комісії спеціальних механічних та загально-технічних дисциплін ЧПЕК КНУТД

## ЗМІСТ

Лекція 1 Вступ .....	4
Теоретична механіка. Статика. Загальні поняття та визначення Статики .....	5
Лекція 2 Плоска система збіжних сил. Додавання сил. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил .....	8
Лекція 3 Умова і рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил .....	12
Лекція 4 Плоска система пар сил. Момент сили відносно точки.....	16
Лекція 5 Плоска система довільно розміщених сил. Зведення сил до заданого центру .....	18
Лекція 6 Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил .....	22
Лекція 7 Просторова система сил.....	24
Лекція 8 Центр ваги пласкої складної фігури.....	26
Лекція 9 Опір матеріалів. Загальні поняття та визначення. Розтяг-стиск. Нормальні сили та нормальні напруги.....	32
Лекція 10 Кручення. Крутний момент та побудова його епюр.....	37
Лекція 11 Згин. Поперечні сили та згинаючі моменти.....	40
Лекція 12 Нормальні напруги при згині. Розрахунки на міцність при згині...42	
Лекція 13 Основні поняття з деталей машин. Поняття про систему допусків та посадок. З'єднання деталей .....	44
Література.....	54

## Вступ

Навчальна дисципліна Технічна механіка та деталі вузлів засобів автоматизації належить до циклу дисциплін загальної підготовки і вивчається студентами електротехнічного напрямку підготовки у 3 та 4 семестрах. Із 90 годин загального обсягу (3 кредити ECTS) для засвоєння теоретичного матеріалу (лекцій) відводиться 27 годин, виконання лабораторних робіт – 10 годин, та на практичні заняття - 8 годин.

Основною метою вивчення дисципліни є оволодіння методами і прийомами, які використовуються при всіх технічних розрахунках, що пов'язані з проектуванням різноманітних споруд і машин, їх подальшою експлуатацією.

Головне завдання навчальної дисципліни полягає в придбанні навиків грамотно користуватись законами і методами розрахунків опорних реакцій простих стрижневих і балочних систем; аналізу видів руху та розрахунку його кінематичних характеристик; визначення характеру навантаження елементів конструкцій у залежності від виду та розташування зовнішніх сил; проведення розрахунків на міцність для типових схем навантаження.

Значення дисципліни полягає в формуванні майбутнього електромеханіка як спеціаліста. Технічна механіка дозволяє не тільки пояснити важливіші явища в оточуючому середовищі, а також є базою для багатьох технічних дисциплін. Від того, як краще і глибше будуть засвоєні студентами основні положення технічної механіки, тим вільніше вони будуть користуватися її методами, тим легший буде для них перехід до продуктивного вивчення дисциплін професійно-практичної підготовки.

Лабораторні роботи з Технічної механіки та ДВЗА сприяють активізації розумової діяльності студентів, привчають до користування вимірювальними інструментами та приладами, лабораторним обладнанням, знайомить з технікою проведення експерименту, прививають навички оформлення і оброблення отриманих результатів. Експеримент ілюструє відповідне теоретичне положення і сприяє засвоєнню навчального матеріалу.

На практичних заняттях з Технічної механіки та ДВЗА студенти набувають практичні навички застосування теоретичного матеріалу за рахунок розв'язування типових задач.

## **Лекція 1 Теоретична механіка. Статика. Загальні поняття та визначення статички.**

### План:

- 1 Загальні поняття та визначення Статички
- 2 Аксиоми статички (самостійне опрацювання)

Технічна механіка складається з трьох основних розділів: Теоретична механіка, Опір матеріалів, Основи деталей машин.

**Теоретична механіка** - наука про найбільш загальні закони механічного руху та рівноваги матеріальних тіл і виникаючі між ними взаємодії.

Сьогодні теоретична механіка, як і елементарна геометрія, є кінцевим інтелектуальним продуктом людства, що володіє високими споживчими якостями - ясність і стислість викладу, однозначність тлумачень, легень запам'ятовування та ін.

Але це досягнуто було не відразу. Першим письмовим джерелом, де механіка подається як наука, є роботи древньогрецького вченого Аристотеля (384-312рр. до н.е.). Він запровадив терміни "механіка" і "статика".

Наукові основи статички і гідростатички закладені грецьким ученим Архімедом (287-212рр. до н.е.). Він виклав теорію рівноваги важеля, що перебуває під дією паралельних сил, створив вчення про центр ваги тіл і дослідив рівновагу тіл, що плавають у рідині.

Подальший розвиток статичка отримала в роботах французького вченого Варіньона (1654-1722). Він встановив у кінцевому вигляді поняття моменту сили відносно точки і довів теорему про момент рівнодійної, яка носить його ім'я.

Своєю сучасною формою геометрична статика завдячує французькому вченому Пуансо (1777-1859), який завершив створення статички, використавши властивості пар сил.

Серед вчених, які працювали в галузі статички, слід відмітити академіків С.К. Котельникова (1723-1808), С.Е. Тур'єва (1766-1813), чудового механіка-самоучки І.П. Кулібіна (1735-1818).

В обґрунтуванні аксіоматички статички значну роль відіграли Л. Ейлер (1707-1783), М.Е. Жуковський (1847-1912), С.О. Чаплигін (1869-1942), В.Г. Імшенецький (1832-1892), О.І. Сомов (1815-1876), В.Л. Кірпічов (1845-1913).

**Теоретична механіка** складається з трьох основних розділів: Статика, Кінематика, Динаміка.

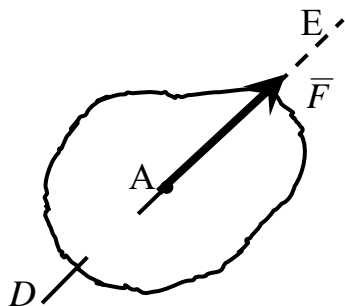
**Статика** - розділ теоретичної механіки, який вивчає методи перетворення одних систем сил в інші, їм еквівалентні, а також умови рівноваги твердих тіл під дією системи сил.

**Абсолютно тверде тіло** - матеріальне тіло, в якому відстань між будь-якими двома точками не змінюється.

**Матеріальна точка** - найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого при умовах даної задачі можна знехтувати.

**Механічна система** - сукупність взаємозв'язаних матеріальних точок, положення і переміщення кожної з яких залежить від положення і переміщення всіх інших.

**Сила** - це величина, що є мірою механічної взаємодії двох тіл. Сила - векторна величина, яка визначається модулем, лінією дії, напрямком дії та точкою прикладення.



Одиницею виміру сили є 1 ньютон ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ), або 1 кілограм сили (1 кГ),  $1 \text{ кГ} \approx 9,8 \text{ Н}$ .

**Лінія дії сили** - лінія  $DE$ , уздовж якої спрямована сила.

**Система сил** - сукупність сил, що діють на будь-яке тіло.

**Еквівалентні системи сил** - системи сил, під дією яких тверде тіло знаходиться в однаковому стані (рівноваги або руху). Позначається « $\sim$ ».

**Зрівноважена система сил** (або еквівалентна нулю) - система сил, під дією якої тверде тіло знаходиться у стані рівноваги.

**Рівнодійна системи сил** - сила, еквівалентна даній системі сил.

Якщо одну систему сил, що діє на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою, не змінюючи при цьому механічного стану, у якому перебуває тіло, то такі дві системи сил називаються **еквівалентними**.

Сила, яка рівна по модулю і напрямлена протилежно рівнодійній, називається **зрівноваженою**.

Сили, що діють на тверде тіло, можна розділити на зовнішні й внутрішні. Зовнішніми називаються сили, що діють на частки даного тіла з боку інших матеріальних тел. Внутрішніми називаються сили, з якими частки даного тіла діють один на одного.

Сила, прикладена до тіла в якій-небудь одній його точці, називається **зосередженою**. Сили, що діють на всі точки даного об'єму тілу або даної частини поверхні тіла, називаються **розташованими**

Поняття про зосереджену силу є умовним, тому що практично прикласти силу до тіла в одній точці не можна. Сили, які ми в механіку розглядаємо як зосереджені, представляють собою, по суті, рівнодіючі деяких систем розподілених сил. Зокрема, сила ваги, що діє на дане тверде тіло, представляє собою рівнодіючу сил ваги його часток. Лінія дії цієї рівнодіючої проходить через точку, що називають центром ваги тіла.

Переважає більшість об'єктів, з якими має справу інженер, взаємодіють з іншими тілами, що "заважають йому переміщатися", тобто обмежують його рух. Наприклад, підшипники обмежують рух вала зубчастого колеса, корпус редуктора обмежує рух підшипників тощо.

Тіло, яке обмежує рух даного тіла у просторі, є по відношенню до нього **в'яззю** (рис. 1).

Тверде тіло, рух якого обмежено в'язями, називається **невільним**.

Проблема полягає в тому, що закони та залежності статички застосовують виключно для вільних тіл. Розглядати невольне тіло можна лише "перетворивши його на вільне". Це можливо, якщо замість в'язей прикласти до тіла сили, що будуть виражати їх механічну дію. Такі сили називають **реакціями**. Їх особливістю є залежність не лише від виду в'язі, а й від зовнішніх (активних) сил. Тому їх інколи називають **пасивними**.

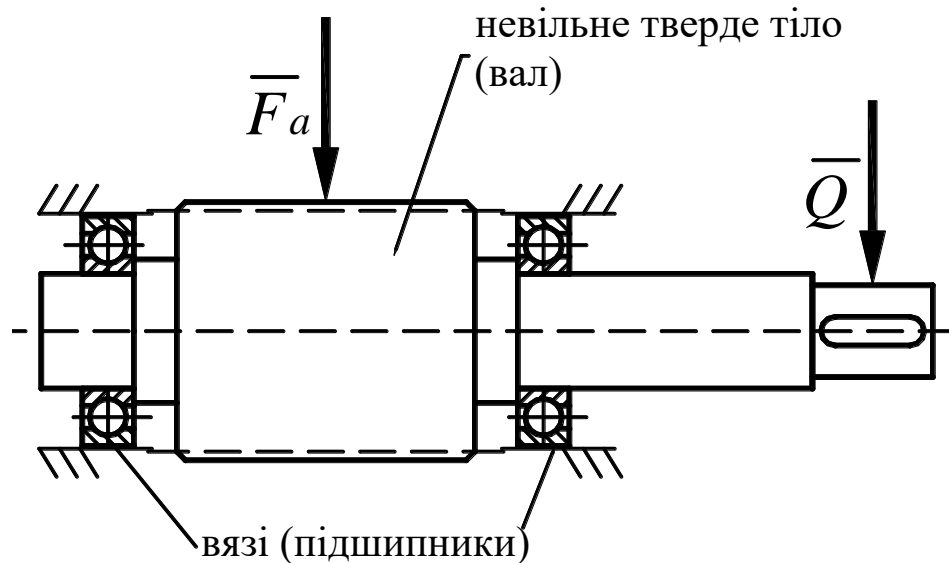


Рис. 1.

Таким чином, одним з основних положень механіки є *принцип звільнення твердих тіл від в'язей*, згідно якому невольне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке окрім сил, які задані, діють реакції в'язей (рис. 2).

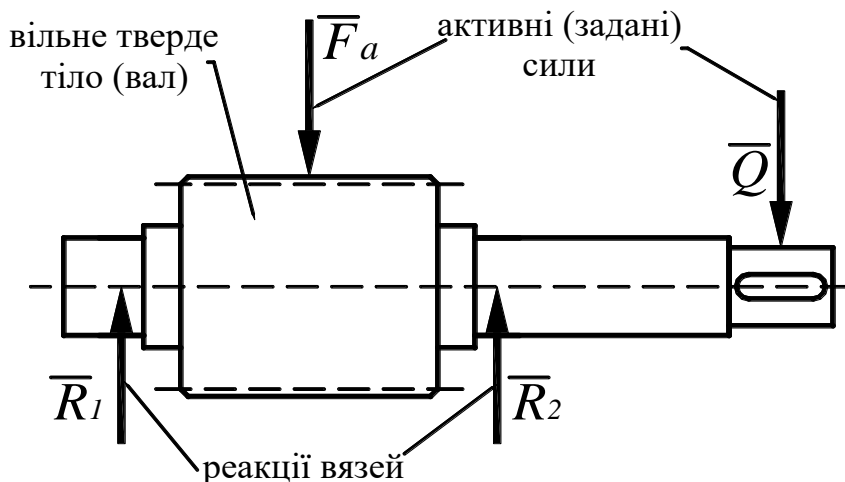


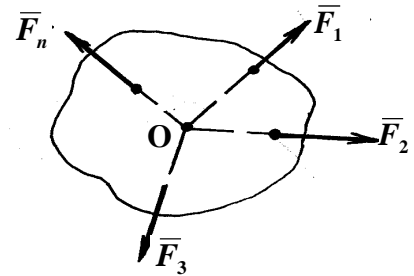
Рис.2

## Лекція 2 Плоска система збіжних сил. Додавання сил. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил

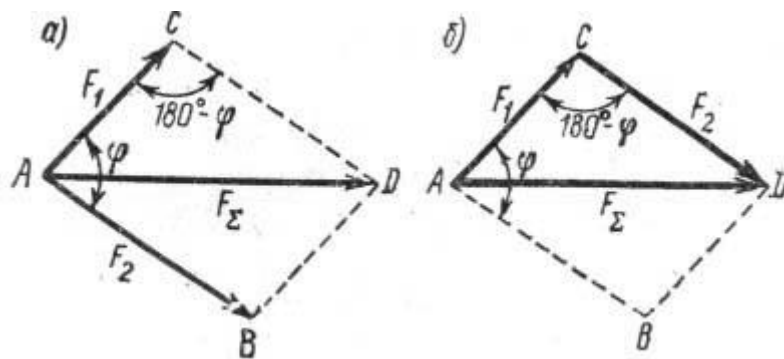
### План:

- 1 Система збіжних сил. Аналітичне додавання двох сил.
- 2 Геометричний спосіб додавання сил
- 3 Проекція сили на ось
- 4 Проекція векторної сили на ось

**Система збіжних сил** - це така система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Тут точка  $O$  - точка перетину сил.



Із 4-ї аксіоми статички відомо, що рівнодіюча двох сил, прикладених до однієї точки, прикладена в цій точці і є діагоналлю паралелограма, побудованого на даних силах.



**Рис.1.**

Так, рівнодіюча двох сил  $F_1$  і  $F_2$ , прикладених до точки  $A$ , буде сила  $F_{\Sigma}$ , що являє собою діагональ паралелограма  $ACDB$ , побудованого на векторах заданих сил. Визначення рівнодіючої двох сил за правилом паралелограма називається векторним, або геометричним додаванням і виражається векторною рівністю  $\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

При графічному визначенні рівнодіючої двох сил замість правила паралелограма можна користуватися правилом трикутника. З довільної точки  $A$  проводимо, зберігаючи масштаб і заданий напрямок, вектор першої складової сили  $F_1$ , з його кінця проводимо вектор, паралельний і рівний другій складовій силі  $F_2$ . Замикаюча сторона  $AD$  трикутника й буде шуканою



рівнодіючою  $F_{\Sigma}$ . Її можна також представити як діагональ паралелограма  $ABDC$ , побудованого на заданих силах.

Модуль рівнодіючої двох сил можна визначити із трикутника  $ACD$ :

$$F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi), \text{ где } \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi,$$

$$\text{поэтому } F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi,$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}.$$

На підставі четвертої аксіоми одну силу  $F_{\Sigma}$  можна замінити двома складовими силами  $F_1$  і  $F_2$ . Таку заміну часто роблять при рішенні завдань статички.

## 2 Геометричний спосіб додавання сил

Рішення багатьох завдань механіки пов'язане з відомої з векторної алгебри операцією додавання векторів і, зокрема, сил. Величину, рівну геометричній сумі сил якої-небудь системи, будемо називати головним вектором цієї системи сил. Поняття про геометричну суму сил не слід змішувати з поняттям про рівнодіючу. Для багатьох систем сил, як ми побачимо надалі, рівнодіючої взагалі не існує, геометричну ж суму (головний вектор) можна обчислити для будь-якої системи сил.

Геометрична сума (головний вектор) будь-якої системи сил визначається або послідовним додаванням сил системи за правилом паралелограма, або побудовою силового багатокутника. Другий спосіб є більше простим і зручним. Для знаходження цим способом суми сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , (рис. 2, а), відкладаємо від довільної точки  $O$  (рис. 2, б) вектор, що зображує в обраному масштабі силу  $F_1$ , від точки  $a$  відкладаємо вектор, що зображує силу  $F_2$ , від точки  $b$  відкладаємо вектор  $bc$ , що зображує силу  $F_3$  і т.д.; від кінця  $m$  передостаннього вектора відкладаємо вектор  $mn$ , що зображує силу  $F_n$ . З'єднуючи початок першого вектора з кінцем останнього, одержуємо вектор  $\Sigma F = R$ , що зображує геометричну суму або головний вектор сил, що складаються:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \text{або} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k.$$

Від порядку, у якому будуть відкладатися вектори сил, модуль і напрямок  $R$  не залежать. Легко побачити, що виконана побудова представляє собою результат послідовного застосування правила силового трикутника.

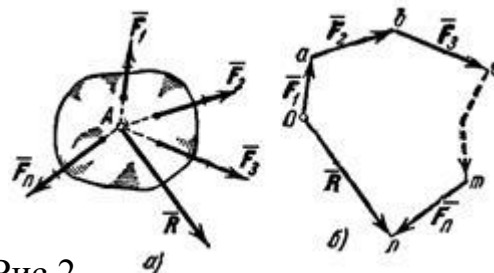


Рис.2

Фігура, що побудована на рис. 2, б, називається силовим (у загальному випадку векторним) багатокутником. Таким чином, геометрична сума або головний вектор деяких сил зображується замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого із цих сил (правило силового багатокутника). При побудові векторного багатокутника варто пам'ятати, що у всіх векторів стрілки, що складаються, повинні бути спрямовані в одну сторону (за обходом багатокутника), а у вектора - у протилежний бік.

### Геометрична умова рівноваги.

Так як рівнодіюча збіжних сил визначається як замикаюча сторона силового багатокутника, побудованого із цих сил, то вона може звернутися в нуль тоді й тільки тоді, коли кінець останньої сили в багатокутнику збігається з початком першої, тобто коли багатокутник **замкнений**.

Отже, для рівноваги системи збіжних сил необхідно, щоб силовий багатокутник, побудований із цих сил, був замкнений.

### 3 Проекція сили на ось

Рішення завдань на рівновагу збіжних сил за допомогою побудови замкнутих силових багатокутників у більшості випадків сполучено із громіздкими побудовами. Більше загальним і універсальним методом рішення таких завдань є перехід до визначення проекцій заданих сил на координатні осі й оперування із цими проекціями. **Віссю називають пряму лінію, якій приписаний певний напрямок.**

Проекція вектора на ось є скалярною величиною, що визначається відрізком осі, який відтинається перпендикулярами, опущеними на неї з початку й кінця вектора.

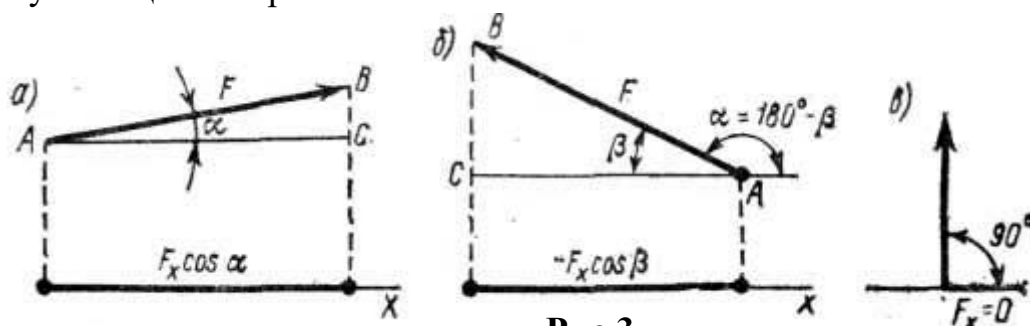


Рис.3

Проекція вектора вважається позитивною (+), якщо напрямок від початку проекції до її кінця збігається з позитивним напрямком осі.

Проекція вектора вважається негативною (-), якщо напрямок від початку проекції до її кінця протилежно позитивному напрямку осі.

Розглянемо ряд випадків проектування сил на вісь:

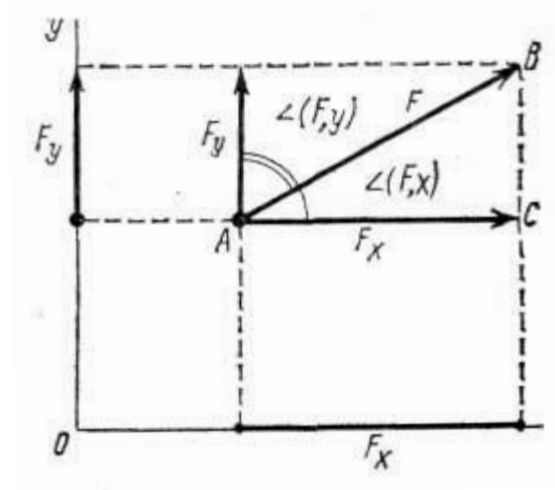
- Вектор сили  $F$  становить гострий кут  $\alpha$  із позитивним напрямком осі  $X$ . Щоб знайти проекцію, з початку й кінця вектора сили опускаємо перпендикуляри на ось  $X$ ; одержуємо:  $F_x = F \cos \alpha$ . Проекція вектора в цьому випадку позитивна.

- Сила  $F$  становить тупий кут  $\alpha$  із позитивним напрямком осі  $X$ . Тоді,  
 $F_x = F \cos \alpha = F \cos (180^\circ - \beta) = -F \cos \beta$ , тобто  $F_x = -F \cos \beta$ .  
 Проекція сили  $F$  на вісь  $x$  у цьому випадку негативна.
- Сила  $F$  (мал.3,в) перпендикулярна осі  $x$ . Проекція сили  $F$  на ось  $X$  дорівнює нулю, тобто  $F_x = F \cos 90^\circ = 0$ .

**Отже, проекція сили на ось координат дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між вектором сили й позитивним напрямком осі.**

Силу, розташовану на площині  $xoy$  (рис.4), можна спроектувати на дві координатні осі  $Ox$  і  $Oy$ . На малюнку зображена сила  $F$  і її проекції  $F_x$ ,  $F_y$ . Через те, що проекції утворюють між собою прямий кут, із прямокутного трикутника  $ACB$  знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \\ \cos(\vec{F}, \hat{x}) &= F_x/F; \\ \cos(\vec{F}, \hat{y}) &= F_y/F. \end{aligned} \right\}$$



**Рис.4**

Цими формулами можна користуватися для визначення модуля й напрямку сили, коли відомі її проекції на координатні осі.

## Лекція 3 Умови і рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

### План

- 1 Проекція векторної суми на ось. Аналітичне визначення рівнодіючої
- 2 Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил
- 3 Розв'язання задач на рівноваги плоскої системи збіжних сил

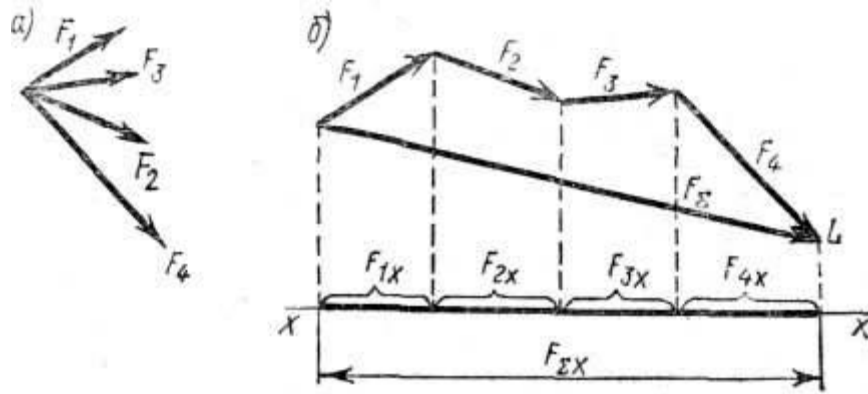


Рис.1

Пригадаємо, чому дорівнює геометрична сума збіжних сил  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . (рис.1.): рівнодіюча, цих сил визначається як замикаюча сторона силового багатокутника.

$$\vec{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Опустимо з вершин силового багатокутника на ось  $x$  перпендикуляри. Розглядаючи отримані проекції сил безпосередньо з виконаної побудови, маємо:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$F_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^n F_{ix},$$

де  $n$  - число векторів, що складаються.

Отже, **проекція векторної суми або рівнодіючої на яку-небудь ось дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів, що складаються, на ту ж ось.** У площині геометричну суму сил можна проєціювати на дві координатні осі, а в просторі — відповідно на три.

**Аналітичне визначення значення й напрямку рівнодіючої плоскої системи збіжних сил (метод проєкцій)**

У системі збіжних сил рівнодіюча може бути знайдена через проєкції складових. (рис.2). Розглянемо її визначення на прикладі системи  $F_1, F_2, F_3$  сил, зображеної на малюнку. Рівнодіюча цих збіжних сил побудована на

малюнку як  $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

Проектуючи всі сили на осі  $Ox$  і  $Oy$  і використовуюючи теорему про проекцію векторної суми, одержуємо:

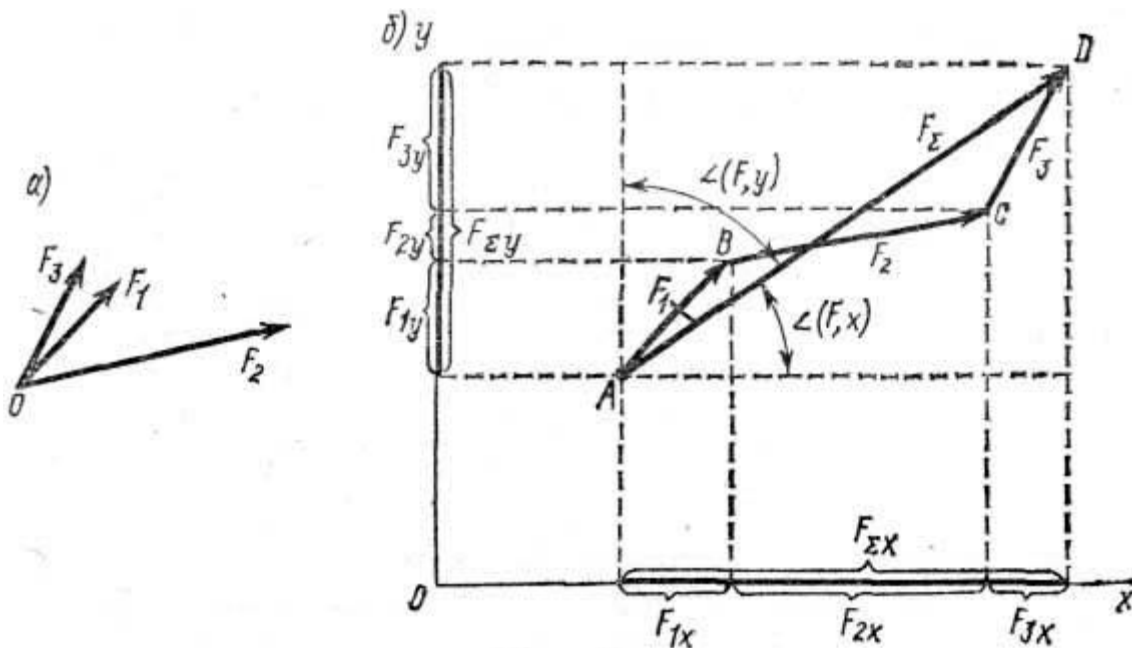


Рис.2.

Проектуючи всі сили на осі  $Ox$  і  $Oy$  й використовуючи теорему про проекцію векторної суми, одержуємо:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{ix}$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{iy}$$

Чисельне значення рівнодіючої сили  $F_{\Sigma}$  через її проекції визначається по формулі

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}$$

Одержуємо:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2}$$

Напрямок визначимо по косинусах кутів, які ця сила утворить із координатними осями:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{F}_{\Sigma}, x) &= F_{\Sigma x}/F_{\Sigma}; \\ \cos(\vec{F}_{\Sigma}, y) &= F_{\Sigma y}/F_{\Sigma}. \end{aligned} \right\}$$

## 2 Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

Збіжна система сил перебуває в рівновазі у випадку замкнутості силового багатокутника. Рівнодіюча при цьому дорівнює нулю ( $F_{\Sigma} = 0$ ). Проекції рівнодіючої системи збіжних сил на координатні осі дорівнюють сумах проекцій складових сил на ті ж осі:

$$\left. \begin{aligned} F_{\Sigma x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ F_{\Sigma y} &= \sum_{i=1}^n F_{iy}. \end{aligned} \right\}$$

Обоє доданків, що коштують під знаком кореня, у всіх випадках позитивні як величини, зведені у квадрат. Тому  $F_{\Sigma} = 0$  тільки при виконанні умов:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Розглянута система збіжних сил перебуває в рівновазі, тоді, коли алгебраїчна сума проекцій її доданків на кожну із двох координатних осей дорівнюють нулю.

Ці залежності називають **рівняннями рівноваги** плоскої системи збіжних сил і використовують при аналітичному рішенні завдань.

### 3 Розв'язання задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил.

#### Задача.

Визначити сили, що навантажують стрижні АВ і АС кронштейну. Кронштейн утримають у рівновазі вантажі  $F_1 = 70$  кН і  $F_2 = 100$  кН (рис.3, а). Вагою частин конструкції і тертям у блоці знехтувати. Виконати перевірку графічним способом.

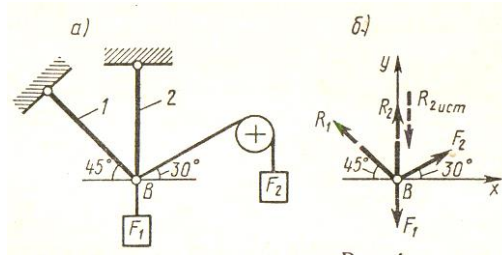


Рис.3.

Аналітичний метод.

1. Розглядаємо рівновагу точки В. До неї проложені активні сили – сили натягу тросів з вантажами  $F_2$ , і  $F_1$ . Розглядаємо точку В як вільну, відкидаємо зв'язки (стрижні 1 і 2), і замінив їх дію реакціями  $R_1$  і  $R_2$ . Напрямок реакції стрижнів невідомий, тому направляємо їх від точки В, вважаючи, що стрижні розтягнуті (рис.2, б). Якщо припущення вірне, то реакція, що визначається матиме позитивний знак, а якщо отриманий знак реакції – від'ємний, то це вказує що стрижень стиснутий і істинний напрям реакції – до точки В.

2. Обираємо традиційне положення системи координат і складаємо рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_x = 0: - R_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\Sigma F_y = 0: R_1 \sin 45^\circ + R_2 \sin 30^\circ - F_1 = 0.$$

3. Із рівнянь рівноваги визначаємо, що  $R_1 = 122$  кН;  $R_2 = - 66,6$  кН.

Знак мінус перед значенням реакції  $R_2$  вказує на те, що попереднє обраний напрямок цієї реакції невірне – її слід спрямувати у протилежний бік, до шарніра В.

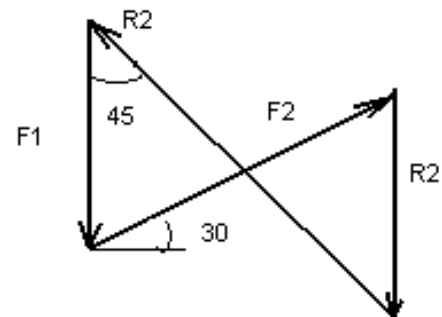
4. Перевірку правильності розв'язання задачі виконують графічним способом. Обираємо масштаб  $\mu=20$  кН/см. Тоді в обраному масштабі довжини вихідних сил:  $l_{F1} = 3,5$  см;  $l_{F2} = 5,0$  см. Використовуючи геометричну умову рівноваги, будуємо силовий багатокутник, починаючи з відомих сил, та визначаємо напрям та величину реакцій стрижнів (рис.4).

Вимірюванням довжин векторів  $R_1$  та  $R_2$  визначаємо їх величини:

$$R_1 = l_{R1} \cdot \mu = 6,1 \cdot 20 = 122 \text{ кН};$$

$$R_2 = l_{R2} \cdot \mu = 3,3 \cdot 20 = 66 \text{ кН};$$

Отже, значення реакцій, що визначені двома різними способами співпадають за модулем та напрямом, значить задача розв'язана вірно.



$$F_1 + F_2 + R_2 + R_1 = 0$$

Рис.4

## Лекція 4 Плоска система пар сил. Момент сили відносно точки

### План:

- 1 Поняття про пару сил
- 2 Властивості пар сил
- 3 Момент сили відносно точки

### 1 Поняття про пару сил

Дві рівні й паралельні сили, спрямовані в протилежні сторони й не лежачі на одній прямій, називаються парою сил. Прикладом такої системи сил можуть служити зусилля, передані руками шофера на кермове колесо автомобіля. Пари сил має велике значення в практиці. Саме тому властивості пари як специфічної міри механічної взаємодії тіл вивчаються окремо.

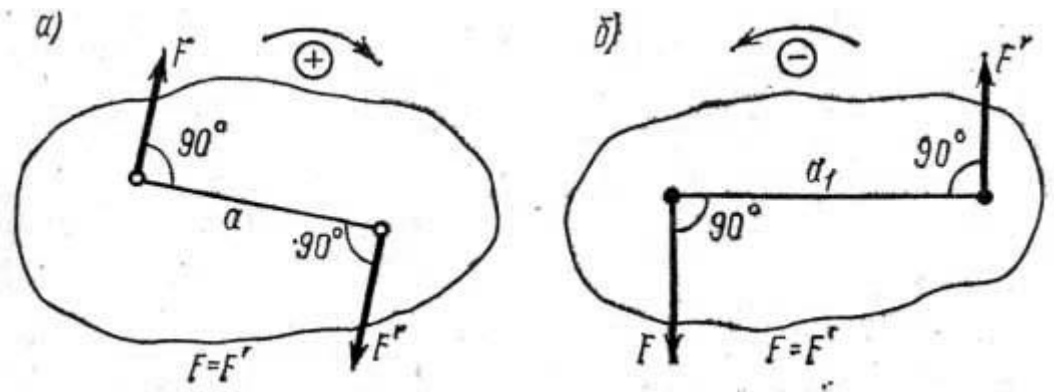


Рис.1

Сума проекцій сил пари на вісь  $x$  і на вісь  $y$  дорівнює нулю, тому **пара сил не має рівнодіючої**. Незважаючи на це тіло під дією пари сил не перебуває в рівновазі.

Дія пари сил на тверде тіло, як показує досвід, полягає в тому, що вона прагне обертати це тіло. Здатність пари сил робити обертання визначається моментом пари, рівним добутку сили на найкоротшу відстань (узяті по перпендикулярі до сил) між лініями дії сил. Позначимо момент пари  $M$ , а найкоротша відстань між силами  $a$ , тоді абсолютне значення моменту:

$$M = Fa = F'a.$$

Найкоротша відстань між лініями дії сил називається **плечем пари**, тому можна сказати, що **момент пари сил за абсолютним значенням дорівнює добутку однієї із сил на її плече**.

Ефект дії пари сил повністю визначається її **моментом**. Тому момент пари сил можна показувати дугоподібною стрілкою, що вказує напрямком обертання. Так як пара сил не має рівнодіючої, її не можна зрівноважити



однією силою. Момент пари в СІ вимірюється в ньютонметрах (Нм) або в одиницях, кратних ньютонметру: кНм, МНм

Момент пари сил будемо вважати позитивним, якщо пара прагне повернути тіло проти напрямку руху годинникової стрілки, і негативним, якщо пара прагне обертати тіло за рухом годинникової стрілки. Прийняте правило знаків для моментів пар умовно: можна було б прийняти протилежне правило.

### 3 Момент сили відносно точки

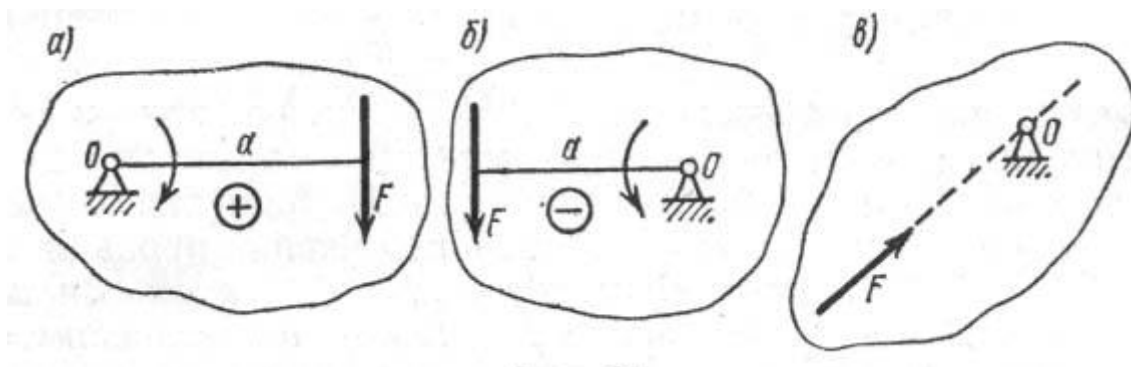


Рис.2.

**Момент сили відносно точки визначається добутком модуля сили на довжину перпендикулярна, опущеного із точки на лінію дії сили (мал.2,а).**

При закріпленні тіла в точці О сила F прагне повертати його навколо цієї точки. Точка О, щодо якої береться момент, називається центром моменту, а довжина перпендикуляра а називається плечем сили щодо центра моменту.

Момент сили F відносно О визначається добутком сили на плече  $M_0(F) = F a$

Вимірюють моменти сил у ньютонметрах (Нм) або у відповідних кратних одиницях, як і моменти пар.

Момент прийнятий уважати позитивним, якщо сила прагне обертати тіло проти ходу годинникової стрілки (рис.2,б), а негативним – за ходом годинникової стрілки (рис.2,а). Коли лінія дії сили проходить через дану точку, момент сили щодо цієї точки дорівнює нулю, тому в такому випадку плече  $a = 0$  (рис.2,в).

Між моментом пари й моментом сили є одна істотна відмінність. Чисельне значення й напрямок моменту пари сил не залежать від положення цієї пари в площині. Значення й напрямок (знак) моменту сили залежать від положення точки, відносно якої визначається момент.

## Лекція 5 Плоска система довільно розміщених сил. Зведення сил до даного центру.

### План:

- 1 Зведення системи сил до заданої точки
- 2 Теорема про момент рівнодіючої
- 3 Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил

### 1 Зведення системи сил до заданої точки

Розглянемо випадок переносу сили в довільну крапку, що не лежить на лінії дії сили.

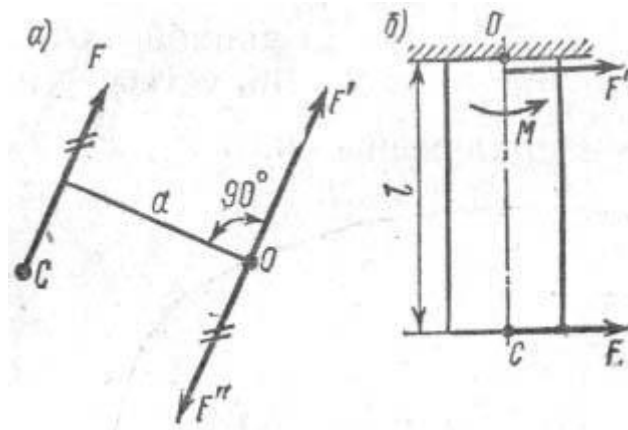


Рис.1

Візьмемо силу  $F$ , прикладену в точці  $C$ . Потрібно перенести цю силу паралельно самої собі в деяку точку  $O$ . Прикладемо у точці  $O$  дві сили  $F'$  і  $F''$ , протилежно спрямовані, рівні за значенням і паралельні заданій силі  $F$ , тобто  $F' = F'' = F$ . Від додавання в точці  $O$  цих сил стан тіла не змінюється, тому що вони взаємно врівноважуються. Отриману систему трьох сил можна розглядати як таку, що складається із сили  $F'$ , прикладеної в точці  $O$ , і пари сил  $FF''$  з моментом  $M = F a$ . Цю пару сил називають **приєднаною**, а її плече  $a$  дорівнює плечу сили  $F$  відносно точки  $O$ .

Таким чином, при **приведенні сили  $F$  до точки, що не лежить на лінії дії сили, маємо еквівалентну систему, що складається із сили, такою ж за модулем й напрямком, як і сила  $F$ , та приєднаної пари сил, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки приведення:**

$$M_O(\vec{F}) = Fa.$$

Як приклад приведення сили розглянемо дію сили  $F$  на кінець затисненого стрижня (рис.1,б). Після приведення сили  $F$  у точку  $O$  затиснений перетин, виявляємо в ньому силу  $F_1$  рівну і паралельну заданій, і приєднаний момент  $M$ , який дорівнює моменту заданої сили  $F$  відносно точки приведення  $O$ ,

$$M = M_O = Fl.$$

Описаний метод приведення однієї сили до даної точки можна застосувати до будь-якого числа сил. Допустимо, що в точках тіла А, В, С та D (рис.2) прикладені сили  $F_1, F_2, F_3, F_4$ .

Потрібно привести ці сили до точки О. Приведемо спочатку силу  $F_1$ , прикладену в точці А. Прикладемо в точці О дві сили  $F_1'$  і  $F_1''$ , паралельні їй і спрямовані в протилежні сторони. У результаті приведення сили  $F_1$  одержимо силу  $F_1'$ , прикладену в точці О, і пари сил  $F_1' F_1''$  із плечем  $a_1$ . У в такий же спосіб поступимо і з силою  $F_2$ , прикладеної в точці В, одержимо силу  $F_2'$ , прикладену в точці О, і пари сил із плечем  $a_2$  і так далі з іншими силами.

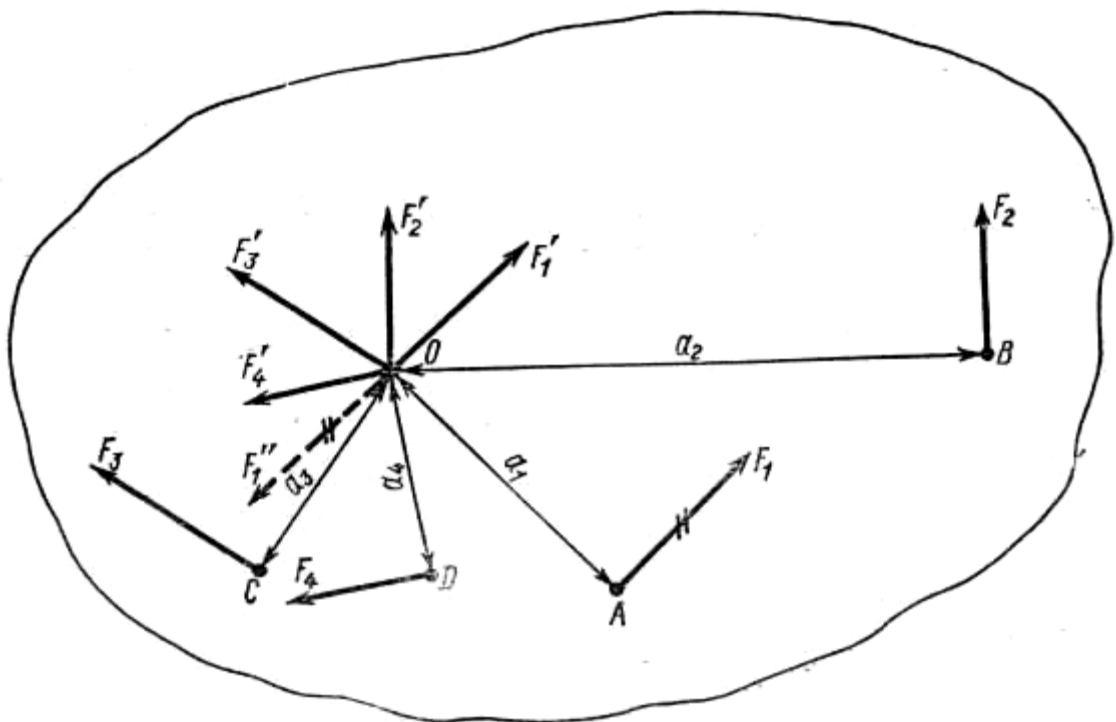


Рис.2

Плоску систему сил, прикладених у точках А, В, С и D, ми замінили збіжними силами  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , прикладеними в точці О, і парами сил з моментами, рівними моментам заданих сил щодо крапки О:

$$M_1 = F_1 a_1 = M_0(\vec{F}_1); \quad M_2 = -F_2 a_2 = M_0(\vec{F}_2);$$

$$M_3 = -F_3 a_3 = M_0(\vec{F}_3); \quad M_4 = -F_4 a_4 = M_0(\vec{F}_4).$$

Збіжні в крапці сили можна замінити однією силою  $F'_{\text{гл}}$ , яка дорівнює геометричній сумі складових:

$$\vec{F}'_{\text{гл}} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 + \vec{F}'_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Цю силу, рівну геометричній сумі заданих сил, називають **головним вектором системи сил** і позначають  $F'_{\text{гл}}$ .

На підставі правила додавання пар сил їх можна замінити результуючою парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів заданих сил щодо точки  $O$  і називається **головним моментом** відносно точки зведення.

$$M_{\text{гл}} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i).$$

Отже, у загальному випадку плоска система сил у результаті приведення до даної точки  $O$  замінюється еквівалентною їй системою, що складається з однієї сили (головного вектора) і однієї пари (головного моменту).

Необхідно засвоїти, що головний вектор  $F'_{\text{гл}}$  не є рівнодіючою даної системи сил, тому що ця система не еквівалентна одній силі  $F'_{\text{гл}}$ . Тільки в окремому випадку, коли головний момент обертається в нуль, головний вектор буде рівнодіючою даної системи сил. Так як головний вектор дорівнює геометричній сумі сил заданої системи, то ні модуль, ні напрямок його не залежать від вибору центру приведення. Значення і знак головного моменту  $M_{\text{гл}}$  залежать від положення центру приведення, тому що плечі складових пар залежать від взаємного положення сил і точки (центру), відносно якої беруться моменти.

### 3 Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил.

Плоска система сил може бути приведена до головного вектора й головного моменту. Тому умови рівноваги сил на площині, як показано вище, мають вигляд:

$$F'_{\text{zx}} = 0;$$

$$M_{\text{zx}} = \sum_{i=1}^n M_0(F_i) = 0$$

Отже, для рівноваги системи сил, довільно розташованих у площині, необхідно й достатньо, щоб головний вектор і головний момент цих сил відносно будь-якого центра дорівнювали нулю.

Головний вектор  $F'_{\text{гл}}$  являє собою геометричну суму всіх сил, що становлять систему перенесених у центр приведення. Модуль головного вектора можна визначити через проєкції на координатні осі всіх сил системи.

Застосувавши для сум проєкцій всіх сил на осі  $x$  и  $y$  в позначення  $\sum_{i=1}^n F_{ix}$  и  $\sum_{i=1}^n F_{iy}$  одержимо для значення головного вектора вираз:

$$F'_{гл} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2} = 0.$$

Головний вектор дорівнює нулю, якщо обоє доданків під коренем дорівнюють нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Крім того, для рівноваги необхідно, щоб

$$\sum_{i=1}^n M_{O_i}(F_i) = 0$$

головний момент також дорівнював нулю, тобто,  $\sum_{i=1}^n M_{O_i}(F_i) = 0$ . Надалі для спрощення запису рівнянь рівноваги при рішенні завдань будемо опускати індекси з сум.

**Рівняння рівноваги** довільної плоскої системи сил можуть бути представлені в трьох формах.

Перша (основна форма цих рівнянь) виведена вище:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_O = 0.$$

Три рівняння рівноваги для плоскої системи сил відповідає трьом можливим ступеням рухливості тіла в площині - двом переміщенням уздовж осей  $x$  і  $y$  та обертанню навколо довільної точки площини.

При рішенні багатьох завдань раціональніше користуватися іншими формами рівнянь рівноваги. Так, як при рівновазі твердого тіла сума моментів всіх прикладених до нього сил відносно будь-якої точки дорівнює нулю, то можна, вибравши три довільні точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и дорівнявши нулю суму моментів щодо кожної з них, одержати три наступні рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0.$$

Це друга форма рівнянь рівноваги. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не повинні лежати на одній прямій.

Третя форма рівнянь рівноваги являє собою рівність нулю сум моментів відносно двох довільних крапок  $A$  и  $B$  і рівність нулю суми проєкцій на деяку ось  $x$ :

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum F_{ix} = 0.$$

При користуванні цією формою рівнянь рівноваги необхідно, щоб ось  $x$  не була перпендикулярна лінії, що з'єднує точки  $A$  и  $B$ .

## Лекція 6. Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил

### План:

1 Типи опор балочних систем

2 Розв'язання задач

### 1 Типи опор балочних систем

Дуже часто в машинах і конструкціях зустрічаються тіла подовженої форми, що називають балками (або балочними системами). Балки в основному призначені для сприйняття поперечних навантажень. Балки мають спеціальні опорні пристрої для сполучення їх з іншими елементами й передачі на них зусиль. Застосовуються наступні види опор:

#### Шарнірно - рухома опора

Така опора допускає поворот навколо осі шарніра й лінійне переміщення паралельно опорної площини. У цій опорі відома точка прикладення опорної реакції — центр шарніра і її напрямок — перпендикуляр до опорної площини. Тут залишається невідомим числове значення опорної реакції  $R_A$ . Умовне зображення опори показано на рис 1.а.

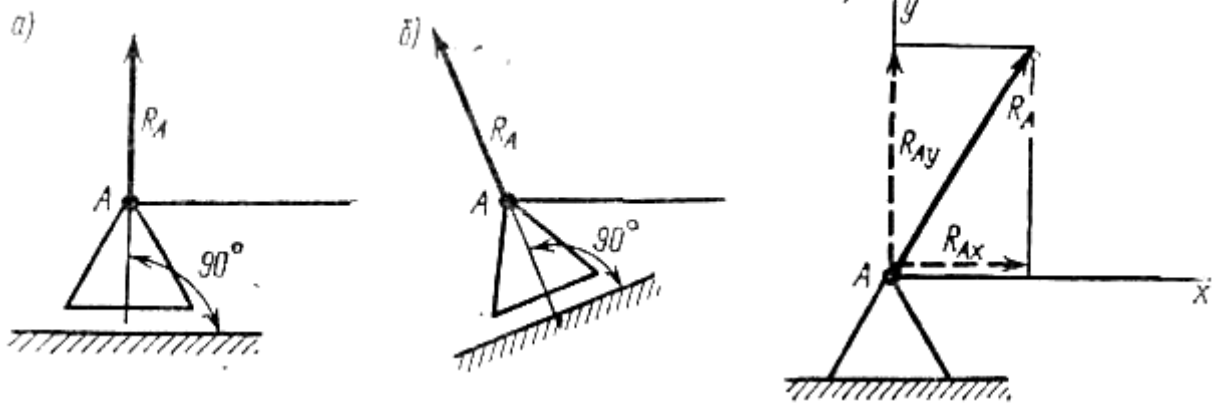


Рис.1

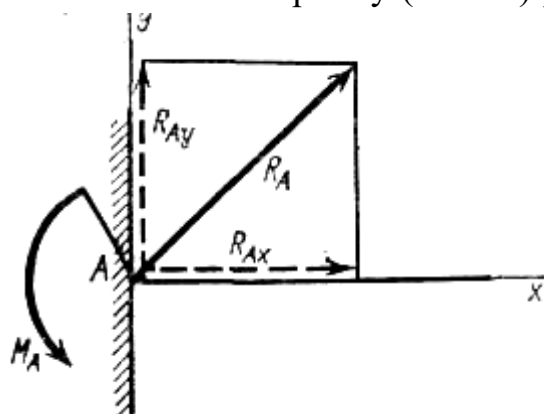
Слід зазначити, що опорна поверхня шарнірно-рухливої опори може бути непаралельна осі балки (рис.1,б). Реакція  $R_A$  у цьому випадку не буде перпендикулярна осі балки, тому що вона перпендикулярна опорної поверхні.

#### Шарнірно - нерухома опора

Ця опора допускає поворот навколо осі шарніра, але не допускає ніяких лінійних переміщень. У цьому випадку відома тільки точка прикладення опорної реакції — центр шарніра; напрям і значення опорної реакції невідомі. Зазвичай, замість визначення значення й напрямку (повної) реакції  $R_A$  знаходять її складові  $R_{Ax}$  і  $R_{Ay}$ .

**Жорстке  
(защемлення)**

**затиснення**



Така опора не допускає ні лінійних переміщень, ні повороту. Невідомими в цьому випадку є не тільки значення й напрямки реакції, але й точка її прикладення. Тому жорстке затиснення замінюють силою реакції  $R_A$  і парою сил з моментом  $M_A$ .

Для визначення опорної реакції варто знайти три невідомих: складові  $R_{Ax}$  і  $R_{Ay}$  опорної реакції по осях координат і реактивний момент  $M_A$ .

### Алгоритм розв'язання задач на рівновагу плоскої системи довільних сил:

- 1 Звільнити балку від в'язів, замінив їх відповідними реакціями.
- 2 Обрати систему координатних осей  $X$  і  $Y$ .
- 3 Силу  $F$  замінити її складовими  $F_x$  і  $F_y$ ; Рівномірно-розташоване навантаження замінити відповідної рівнодіючою  $Q$ .
- 4 Скласти три рівняння рівноваги і визначити з них реакції опор балки.
- 5 Для перевірки скласти рівняння рівноваги, що не було використано при розв'язанні задачі

**Задача .** Визначити опорні реакції двохопорної балки (рис.3, а)

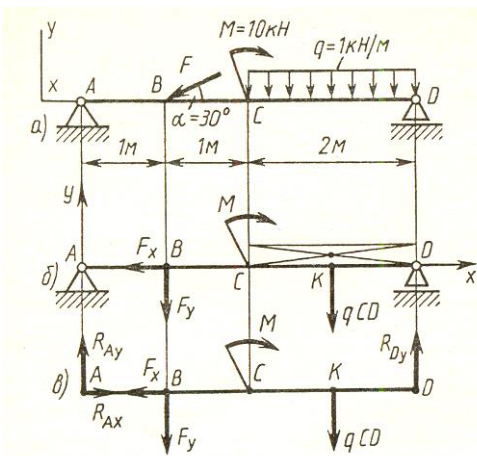


Рис.3.

1. Обираємо систему координатних осей  $X$  і  $Y$ .
2. Силу  $F$  замінюємо її складовими  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \sin \alpha$ . Рівнодіюча  $Q = q \cdot CD$  рівномірно розташованого навантаження прикладена у середині відрізка  $CD$ .
3. Звільняємо балку від опор, замінив їх реакціями (рис..3, б,в)
4. Складаємо рівняння рівноваги і визначаємо невідомі реакції:

$$\Sigma M_A = 0: -F_y \cdot AB - M - Q \cdot AK + R_D = 0;$$

З цього рівняння визначаємо реакцію  $R_D = 6,5$  кН.

$$\Sigma M_D = 0: F_y \cdot BD - M + Q \cdot KD - R_{Ay} \cdot AD = 0;$$

з цього рівняння визначаємо реакцію  $R_{Ay} = 5,5$  кН.

$$\Sigma F_x = 0: R_{Ax} - F_x = 0; R_{Ax} = F_x = 17,3 \text{ кН.}$$

5. Перевірку правильності рішення підтверджує таке рівняння:

$$\Sigma F_y = 0: R_{Ay} - F_y - Q + R_D = 0.$$

$$5,5 - 10 - 2 + 6,5 = 0.$$

Умова рівноваги виконується, значить задача розв'язана вірно.

## Лекція 7 Просторова система сил

### План:

1 Поняття про просторову систему сил

2 Момент сили відносно осі

3 Умови та рівняння рівноваги просторової системи сил

### 2 Момент сили відносно осі

Якщо момент сили відносно деякого центра викликає обертальний рух тіла навколо цього центра, то момент сили відносно осі викликає обертання тіла навколо даної осі. При цьому задача визначення *плеча сили відносно осі* дещо складніша, ніж визначення плеча сили відносно точки.

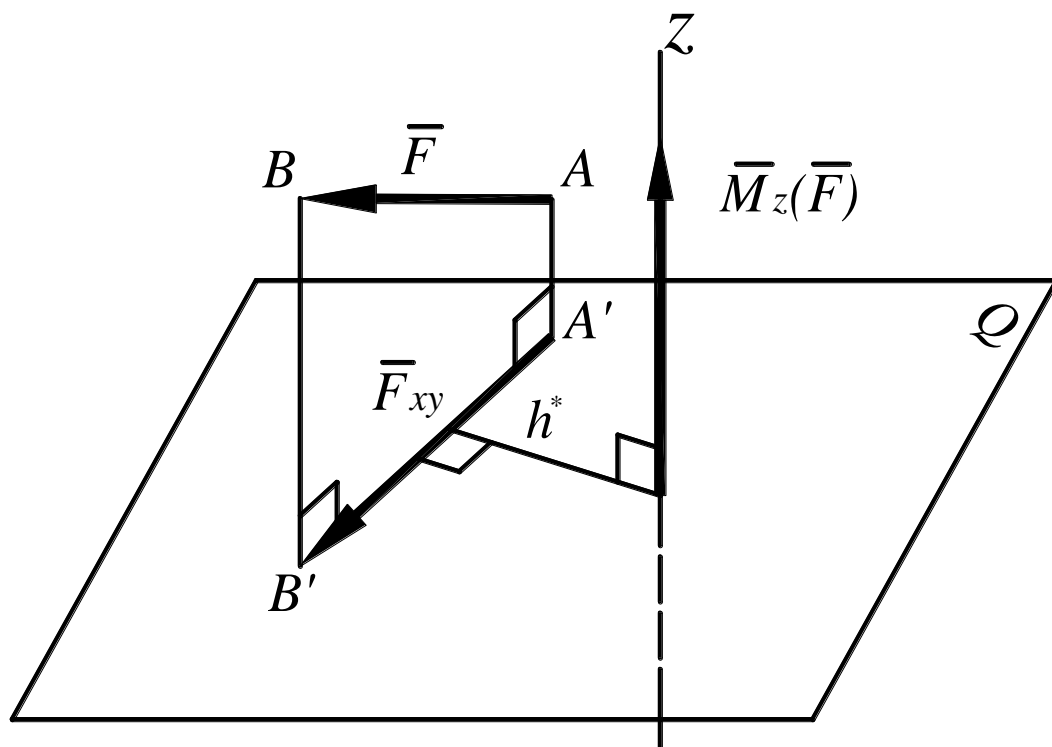


Рис. 1

Припустимо, що до твердого тіла в точці А прикладена сила  $\vec{F}$ . Для того, щоб визначити її момент відносно осі (рис. 35), виконуємо наступні дії:

1. Проводимо площину  $Q$ , перпендикулярну осі  $Oz$ , і знаходимо точку  $O$  перетину цієї площини з віссю.

2. Проектуємо силу  $\vec{F}$  на зазначену площину і отримуємо проекцію  $\vec{F}_{xy}$ .



3. З точки  $O$  опускаємо перпендикуляр  $h^*$  на лінію дії проекції і визначаємо момент проекції сили  $\overline{F}_{xy}$  відносно точки  $O$ :

$$M_z(\overline{F}) = M_O(\overline{F}_{xy}).$$

Таким чином,

$$M_z(F) = \pm F_{xy} h^* .$$

Знак моменту визначається, як і раніше, в залежності від напрямку обертання тіла навколо осі під дією даної сили: якщо обертання здійснюється проти годинникової стрілки - знак "плюс", якщо за годинниковою стрілкою - "мінус".

*Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:*

Якщо  $F_{xy}=0$ , тобто лінія дії сили паралельна осі.

Якщо  $h^*=0$ , тобто лінія дії сили перетинає ось.

Звідси випливає: якщо сила і ось лежать в одній площині, момент сили відносно цієї осі дорівнює нулю.

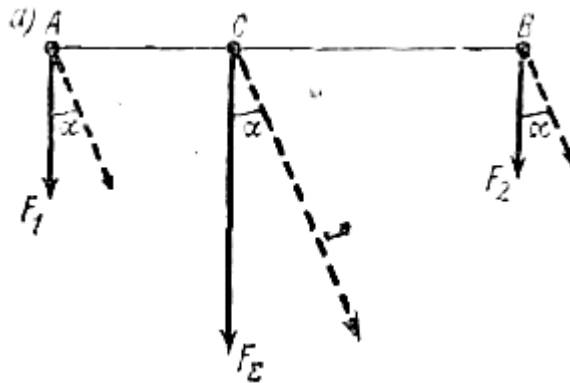
## Лекція 8 Центр ваги плоскої складної фігури

### План:

- 1 Центр паралельних сил і його координати
- 2 Центр ваги тіла. Методи знаходження центра ваги
- 3 Полярний і осьовий моменти інерції
- 4 Експериментальні методи визначення центру ваги фігури, тіла

### 1 Центр паралельних сил і його координати

Встановимо одну важливу властивість точки прикладення рівнодіючої двох паралельних сил.



Нехай у точках А і В на тіло діють паралельні сили  $F_1$  і  $F_2$  (рис..1). Рівнодіюча цих сил дорівнює їхній сумі, паралельна їм, спрямована в ту ж сторону, а її лінія дії ділить пряму А В на частині, обернено пропорційним цим силам, тобто

$$AC / BC = F_2 / F_1$$

Повернемо сили  $F_1$  і  $F_2$  на довільний кут  $\alpha$ , тобто змінимо їхній напрямок, зберігши паралельність. При цьому рівнодіюча залишиться рівній їхній сумі, паралельної їм, спрямованої в ту ж сторону, а лінія її дії знову поділить пряму АВ на частині, обернено пропорційним величинам заданих сил. На рис.,а точкою С позначене перетинання лінії дії рівнодіючої з лінією АВ. Ця точка зветься **центром паралельних сил**, і її положення не залежить від напрямку сил, що складаються.

Будь-яке тіло можна розглядати як таке, що складане з великої кількості малих часток, на які діють сили ваги. Всі ці сили спрямовані до центра Землі по радіусі. Так як розміри тіл, з якими доводиться мати справу в техніку, мізерно малі в порівнянні з радіусом Землі (значення його близько 6371 км), то можна вважати, що прикладені до часток сили ваги паралельні й вертикальні. Отже, сили ваги окремих часток тіла утворюють систему паралельних сил. Рівнодіючу цих сил називають **силою ваги**.

Центр паралельних сил ваги, що діють на всі частки тіла, називається **центром ваги тіла**. Центр ваги тіла не міняє свого положення при повороті тіла.

Виведемо формули, що дозволяють визначати положення центра будь-якої системи паралельних сил.

Нехай задана система паралельних сил  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ ; координати точок  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  прикладання цих сил відомі (рис 2.). Позначимо точку прикладання рівнодіючої  $F_\Sigma$  буквою  $C$ , її координати позначимо  $x_c, y_c$ . Як відомо з попереднього,

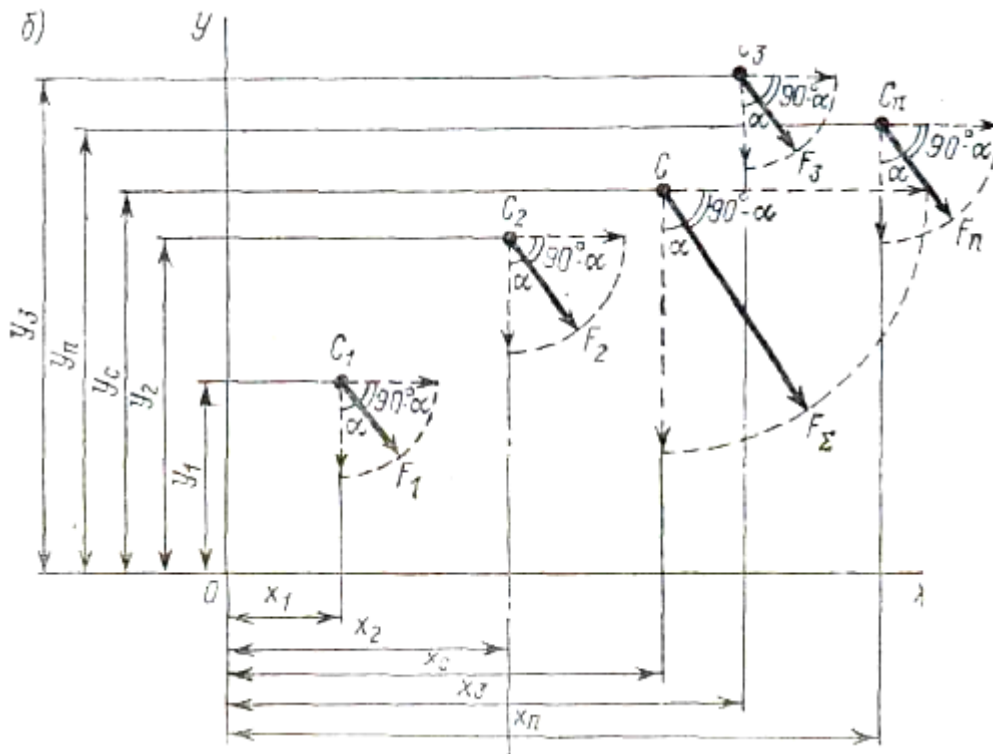
$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

Застосуємо теорему про момент рівнодіючої (теорему Вариньона) відносно початку координат (крапки 0):

$$F_\Sigma x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

звідки

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F_\Sigma} = \frac{\sum F_i x_i}{F_\Sigma}$$



але, так як

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum F_i,$$

то

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

Повертаючи за аналогією задані сили проти годинникової стрілки на кут  $(90^\circ - \alpha)$  так, щоб вони стали паралельні осі  $x$ , і користуючись теоремою про момент рівнодіючої, одержуємо формулу для іншої координати центра паралельних сил:

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots + F_n y_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

**Положення (координати) центра просторової системи паралельних сил визначають по формулах:**

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$

Виведені формули використовуються для обчислення координат центра ваги тіла, що має кінцеве число окремих частин правильної форми (циліндрів, кубів, паралелепіпедів і т.п.). Тоді замість підставляються значення  $G_i$  під якими мають на увазі сили ваги окремих частин тіла, а під  $x_i, y_i, z_i$  — координати їхніх центрів ваги.

## 2 Центр ваги тіла. Методи знаходження центра ваги

Знаходження центра ваги є важливим завданням розробки будь-якого механічного пристрою, особливо в аерокосмічних галузях, кораблебудуванні й точному приладобудуванні.

Виходячи з отриманих загальних положень, можна вказати конкретні методи знаходження центра ваги. Деякі з них ми розглянемо нижче.

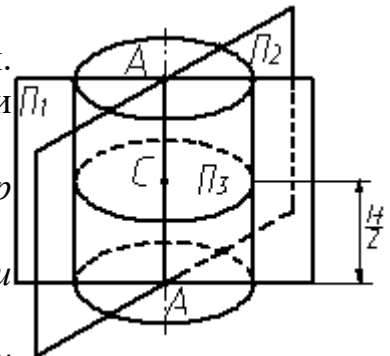
### 2.1 Метод симетрії.

Метод застосовується тільки для однорідних тел. Опускаючи нескладні докази, сформулюємо три правила методу.

1. Якщо тіло має площина симетрії, то центр ваги тіла лежить у цій площині.

2. Якщо тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла перебуває на цій осі.

3. Якщо тіло має центр симетрії, то центр ваги тіла перебуває в цій крапці.



Використовуючи правила, визначимо положення центра ваги однорідного циліндра висотою  $H$ .

Розсічемо циліндр по діаметрі площиною  $\Pi_1$ , що є першою площиною симетрії циліндра (мал. 3). Розсікаючи циліндр по іншому діаметрі другою площиною симетрії  $\Pi_2$ , знайдемо вісь симетрії  $AA$  циліндра, що є лінією перетинання двох площин симетрії й співпадаючу з віссю циліндра. Нарешті, розсікаючи циліндр навпіл площиною  $\Pi_3$ , перпендикулярної осі циліндра, знайдемо центр симетрії  $C$ , що перебуває в крапці перетинання площини симетрії  $\Pi_3$  з віссю симетрії  $AA$ . Таким чином, центр ваги однорідного циліндра перебуває на осі циліндра на висоті  $H/2$  від підстави (мал. 43).

### 2.2 Метод розбивання (розчленування).

Він застосовується, коли однорідне тіло можна розбити на частини, положення центрів ваги яких відомі або легко визначаються. У неоднорідному тілі ці частини повинні мати ще й однакову питому вагу у всіх їхніх крапках. Після розбивки положення центра ваги всього тіла

знаходять, використовуючи дискретні формули для визначення координат центра ваги.

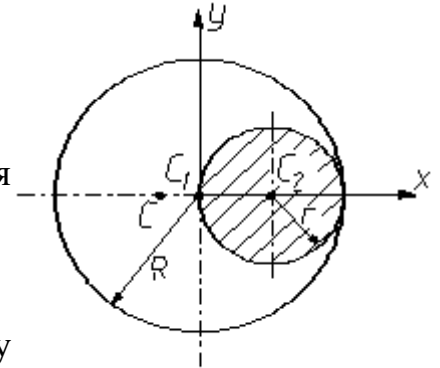


Рис. 46

### 2.3 Методи негативних ваг, об'ємів і площ.

Ці методи є окремими випадками методу розбивання і застосовуються для тіл з порожнинами (отвору, вирізи й т.д.). У них використовується ідея методу розбивок, але при знаходженні центра ваги по формулах (10 - 14) ваги, обсяги або площі порожнин беруть зі знаком "-".

Застосуємо метод негативних площ для знаходження координат центра ваги однорідного диска радіуса  $R$  із круглим отвором радіуса  $r$ , коли  $R = 2r$  (мал. 4). Приймаємо за вісь  $C_1X$  вісь симетрії отриманої плоскої фігури, де  $C_1$  - початок координат, що збігає із центром ваги диска без отвору. Крапкою  $C_2$  позначений центр ваги отвору. За правилами симетрії центр ваги фігури перебуває на осі  $C_1X$ , тому  $Y_C = 0$ . Координату  $X_C$  визначаємо по першій формулі (14), привласнюючи в ній знак "-" площі отвору  $s_2$ :

$$X_C = \frac{s_1 x_1 - s_2 x_2}{s_1 - s_2}$$

Тут

$$s_1 = \pi R^2 = 4\pi r^2 \quad s_2 = \pi r^2 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = r$$

Тоді

$$X_C = \frac{0 - \pi r^2 \cdot r}{4\pi r^2 - \pi r^2} = -\frac{r}{3} = -\frac{R}{6}$$

Аналіз результату показує, що центр ваги  $C$  диска з отвором зміщений від отвору убік важкої частини плоскої фігури.

### 2.4 Експериментальні методи

**Якщо тіло має неправильну форму або якщо воно неоднорідно** (наприклад, у ньому є порожнечі), то розрахунок положення центра ваги часто скрутне й це положення зручніше знайти за допомогою **методу підвішування**.

Нехай, наприклад, потрібно знайти центр ваги шматка фанери. Підвісимо його на нитці (рис. 5). Очевидно, у положенні рівноваги центр ваги тіла  $C$  повинен лежати на продовженні нитки, інакше сила ваги буде мати момент щодо крапки підвісу, який би почав обертати тіло. Тому, провівши на нашій шматку фанери пряму, що представляє продовження нитки, можемо затверджувати, що центр ваги лежить на цій прямій. Дійсно, підвішуючи тіло в різних крапках і проводячи вертикальні прямі, ми переконаємося, що всі вони перетнуться в одній крапці. Ця крапка і є центр ваги тіла (тому що він повинен лежати одночасно на всіх таких прямих). Подібним чином можна визначити положення центра ваги не тільки плоскої фігури, але й більше складного тіла. Положення центра ваги літака визначають, вкочуючи його колісьми на платформи ваг. Рівнодіючих сил

ваги, що доводяться на кожне колесо, буде спрямована по вертикалі, і знайти лінію, по якій вона діє, можна за законом додавання паралельних сил.

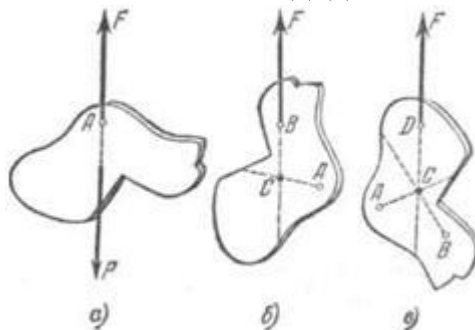


Рис. 5. Крапка С перетинання вертикальних ліній, проведених через точки підвісу А, В, D, є центр ваги тіла.

При зміні ваги окремих частин тіла або при зміні форми тіла положення центра ваги міняється. Так, центр ваги літака переміщується при витраті пального з баків, при скиданні бомб, значній витраті снарядів. Для наочного досвіду, що ілюструє переміщення центра ваги при зміні форми тіла, зручно взяти два однакових бруски, з'єднаних шарніром (мал. 130). У тому випадку, коли бруски утворять продовження один іншого, центр ваги лежить на осі брусків. Якщо бруски зігнути в шарнірі, то центр ваги виявляється поза брусками, на бісектрисі кута, що вони утворять. Якщо на один із брусків надягти додатковий вантаж, то центр ваги переміститься у бік цього вантажу.

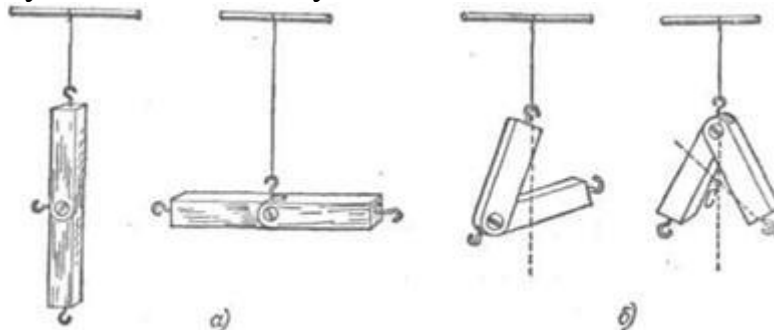


Рис. 6 .а) Центр ваги двох з'єднаних шарніром брусків, розташованих на одній прямій, лежить на осі брусків.

б) Центр ваги зігнутої системи брусків лежить поза брусками.

Іншим методом є **метод зважування**, ефективний для зразків техніки. Ідея методу стане ясна на прикладі визначення однієї з координат центра ваги літака  $X_C$  у пов'язаній з літаком системі координат  $AXY$  (мал. 47). Літак в'їжджає колісьми переднього й заднього шасі (відстань між ними  $AB = l$ ) на напільні пружинні ваги. Показання ваг дорівнюють величинам сил  $N_1$  і  $N_2$ , з якими платформи ваг давлоть на колеса літака. По відомим  $N_1$  і  $N_2$  з рівняння рівноваги для осі  $AU$  визначаємо вага літака  $P = N_1 +$

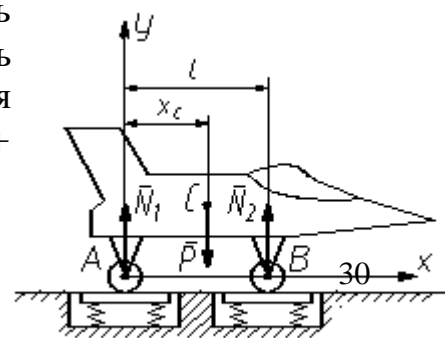
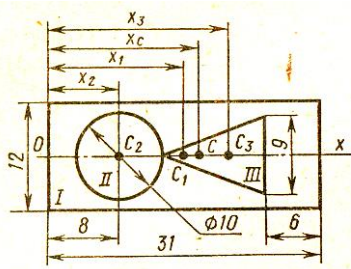


Рис. 47

$N_2$ , а з рівняння моментів щодо центра ваги  $C$  знаходимо  $X_C = N_2 l / (N_1 + N_2)$ .

Очевидно, що в експерименті можна використовувати тільки одні ваги. Тоді літак в'їжджає на ваги спочатку передніми колісьми й вимірюється  $N_2$ , а потім задніми, коли вимірюється  $N_1$ . Якщо ж відома вага літака, то для знаходження  $X_C$  досить одного виміру.

**Задача .** Для заданої плоскої фігури (тонкої однорідної пластини) визначити положення центру ваги. Розміри на кресленні дані у сантиметрах. Перевірку зробити методом підвішування.



1. Дану складову фігуру уявимо як таку, що складається з трьох простих: I - прямокутник; II – коло; III – трикутник. Площі кола і трикутника вважаємо від'ємними, а площу прямокутника - без врахування отворів, що він

містить.

2. Площі простих фігур:  $A_1 = 21 \cdot 31 = 372 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = - \pi d^2/4 = - 3,14 \cdot 10^2/4 = - 78,5 \text{ см}^2$ ;  $A_3 = - 12 \cdot 9/2 = - 54 \text{ см}^2$ .

3. Фігура має ось симетрії, а значить її центр ваги буде лежати на цій осі. Суміщаємо координатну ось  $X$  з віссю симетрії, а початок координат – з лівим краєм фігури.

4. Координати центру ваги простих фігур:  $x_1 = 31/2 = 15,5 \text{ см}$ ;  $x_2 = 8 \text{ см}$ ;  $X_3 = 31 - 6 - 12/3 = 21 \text{ см}$ , де  $12/3$  – відстань від центра ваги трикутника до його основи, що дорівнює  $1/3$  від його висоти.

5. Координати центру ваги заданої фігури:

$$X_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{372 \cdot 15,5 - 78,5 \cdot 8 - 54 \cdot 21}{372 - 78,5 - 54} = 16,6 \text{ см.}$$

5. За допомогою експериментального методу – підвішування перевірити правильність визначення координати центру ваги заданої фігури.

## Лекція 9 Опір матеріалів. Загальні поняття та визначення

### План:

- 1 Загальні поняття та визначення опору матеріалів
- 2 Застосування методу перерізів
- 3 Розтяг-стиск. Нормальні сили та напруги. Їх епюри.
- 4 Розрахунки на міцність при розтязі-стиску

### **1 Загальні поняття та визначення опору матеріалів**

В основах розрахунків на міцність розглядаються і вирішуються на рівні інженерних методів питання про міцність, жорсткість та стійкість елементів конструкцій (деталей машин та споруд).

**Міцність** – здатність конструкцій (також матеріалів, з яких вони виготовлені) опиратися руйнуванню під дією навантажень (також температурних, електромагнітних полів і інших зовнішніх факторів).

**Жорсткість** – здатність конструкцій опиратися деформуванню (зміні форми і розмірів) під дією навантажень.

**Стійкість** – здатність конструкцій утримувати початкову форму рівноваги. Як приклад втрати стійкості слід навести викривлення тонкого прямолінійного стержня, що знаходиться під дією стискальних сил.

Типовими задачами розрахунків на міцність є:

- 1) *задача аналізу* (перевірка міцності та жорсткості): при заданих навантаженнях визначити напруження і деформації та перевірити, чи не перевищують вони допустимих значень;
- 2) *задача синтезу* (проектувальні розрахунки): підбір матеріалів та визначення розмірів елементів конструкцій при заданих навантаженнях;
- 3) *розрахунок вантажопідйомності*: при заданих параметрах конструкції визначення граничних або руйнівних навантажень.

Вперше питання про розрахунок на міцність було розглянуте у роботах відомого італійського вченого Галілео Галілея. Значний внесок в розвиток розрахунків на міцність зробили відомі вчені: Леонард Ейлер, Д.І. Журавський, Ф.С. Ясинський, С.П. Тимошенко, М.М. Беляєв, О.М. Крилов, С.В. Серенсен, Г.С. Писаренко та інші.

При розрахунках на міцність враховуються тільки головні фактори і особливості форми. При цьому реальна конструкція замінюється спрощеною моделлю, що має назву розрахункова схема.

Відповідно геометричній формі деталей будують 3 види розрахункових схем (моделей):

**Брус** (одновимірна схема) – тіло, у котрого довжина значно більше розмірів поперечного перерізу. Прямий брус, що зазнає розтягу або стиску називається *стержнем*. Якщо брус працює на згин, то його називають *балкою*, а на кручення – *валом*.

В процесі роботи машин та споруд їх деталі сприймають різноманітні навантаження, або різні сили, моменти сил. На розрахункових схемах певні елементи конструкцій відокремлюються від інших. Дія тих об'єктів, які не



увійшли до розрахункової схеми, враховується так званими *зовнішніми* силами. Наприклад, на рисунку 1.1 зовнішніми є прикладені до стержня сили  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

### Метод перерізів

Необхідним етапом оцінки міцності та жорсткості деталі є аналіз внутрішніх сил. Для визначення внутрішніх сил використовується *метод перерізів*. Суть цього методу визначається послідовністю таких операцій (рисунок 1.1):

- 1) умовно робимо переріз у місці визначення внутрішніх сил;
- 2) відкидаємо одну з двох частин перерізаної деталі;
- 3) дію відкинutoї частини на залишену замінюємо внутрішніми силами. Ці сили врівноважуються зовнішніми силами, що прикладені до залишеної частини;

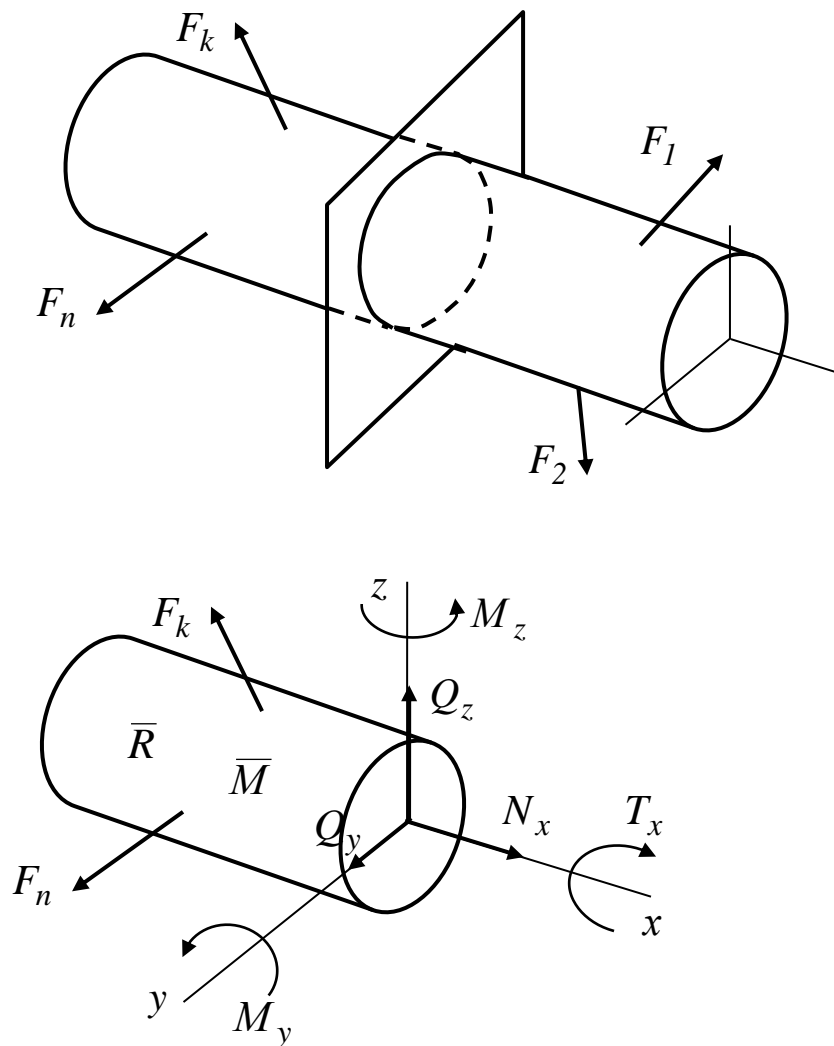


Рис. 1 Метод перерізів. Внутрішні силові фактори.

- 4) визначаємо невідомі внутрішні сили з рівнянь рівноваги.

У загальному випадку просторової задачі система внутрішніх сил (рис.1 б) зводиться до головного вектора сил  $\bar{R}$ , прикладеного у центрі ваги перерізу, та головного моменту  $\bar{M}$ , які розкладаємо по осях координат

$$\bar{R} = \bar{N}_x + \bar{Q}_y + \bar{Q}_z; \quad \bar{M} = \bar{T}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z.$$

Шість внутрішніх силових факторів, що виникають у перерізі деталі в загальному випадку, мають такі назви:

$\bar{N}_x$  – подовжня сила (або нормальна);

$\bar{Q}_y, \bar{Q}_z$  – поперечні сили;

$\bar{T}_x$  – крутний момент;

$\bar{M}_y, \bar{M}_z$  – згинальні моменти.

Для визначення невідомих внутрішніх силових факторів (ВСФ) використовують шість рівнянь рівноваги статички:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; & \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; & \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; & \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; & \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \end{cases}$$

Напруження залежить від орієнтації перерізу. Сукупність напружень, що діють по різних площадках, проведених через точку, характеризують *напружений стан у точці*.

За фізичною ознакою деталь може деформуватися пружно чи пластично.

**Пружне деформування** – таке, що після повного розвантаження деталь повертається до своєї початкової форми і розмірів, а при **пластичному деформуванні** – не повертається. Відповідно до цього, деформації, які зникають після розвантаження, називають *пружними*, а ті, що залишаються – *пластичними* (або *залишковими*).

Розрізняють 4 прості види навантаження бруса і відповідних їм видів деформування:

- *Розтяг* або *стиск* ( $N \neq 0$ ). Характеризуються подовженням або вкороченням бруса ( $\Delta l$ ).

- *Зсув* ( $Q \neq 0$ ). Характеризується відносним паралельним зміщенням двох суміжних поперечних перерізів.

- *Згин* ( $M \neq 0$ ). Супроводжується викривленням осі бруса і характеризується у кожному перерізі величиною прогину  $y$  та кута повороту  $\theta$ .

- *Кручення* ( $T \neq 0$ ). Характеризується кутом взаємного закручування перерізів  $\Delta\varphi$  відносно осі бруса.

Комбінація простих видів навантаження (деформування) бруса називається складним навантаженням (деформуванням).

### 3 Розтяг-стиск. Нормальні сили та нормальні напруги, їх епюри

*Осьовим (центральною) розтягом або стиском бруса – називається такий простий вид навантаження, при якому єдиним внутрішнім силовим фактором у поперечному перерізі цього стержня є внутрішня подовжня сила  $N$ .*

Простіше за все цей вид навантаження можна реалізувати, якщо прикласти до стержня зовнішні сили  $F_i$ , лінія дії котрих збігається з його віссю (рисунок 2.1 а).

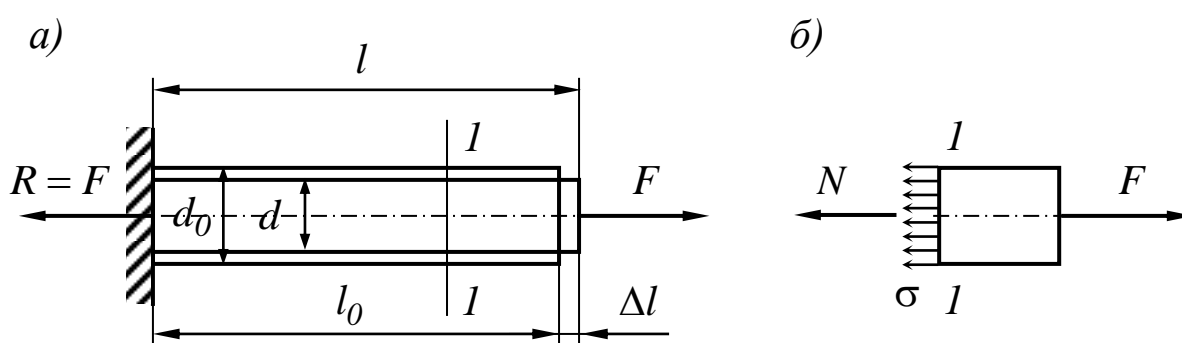


Рис.1 Модель розтягу бруса

Для визначення внутрішньої повздовжньої сили  $N$  застосуємо метод перерізів (рисунок 1, б).

З умов рівноваги уявно відрізаної частини стержня отримаємо:  $N = F$ .

У загальному випадку, коли зовнішніх сил декілька, маємо правило:

*Подовжня сила  $N$  у поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стержня зовнішніх сил, розташованих з однієї сторони перерізу.*

**Правило знаків:**  $N > 0$ , якщо вона розтягує (направлена від перерізу);  $N < 0$ , якщо вона стискає (направлена до перерізу).

Для наочності розташування нормальних сил вздовж повздовжньої осі бруса, стоять епюри.

*Нормальні напруги та їх епюри. Умови міцності при розтязі-стиску.*

У поперечних перерізах діють тільки рівномірно розподілені (гіпотеза Бернуллі) нормальні напруження  $\sigma$ , що можуть визначатися за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

де  $A$  – площа перерізу.

Розглянемо декілька прикладів визначення нормальних сил та нормальних напруг та принципи побудови їх епюр

### Задача.

Для заданного двоступеневого бруса побудувати епюри повздовжніх сил та нормальних напруг (рис.2,а).

**Дано:**

$$F_1 = 30 \text{ кН}$$

$$F_2 = 38 \text{ кН}$$

$$F_3 = 42 \text{ кН}$$

$$A_1 = 1,9 \text{ см}^2$$

$$A_2 = 3,1 \text{ см}^2$$

$N$  - ?

$\sigma$  - ?

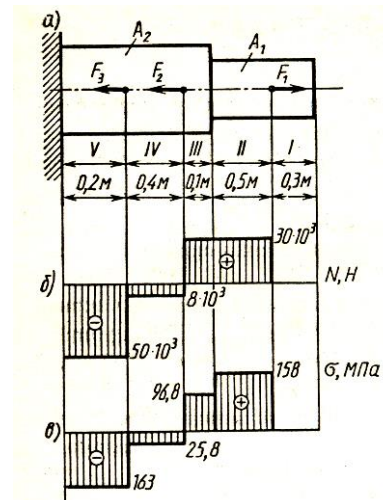


рис.2

### Розв'язання

1 Розбиваємо брус на ділянки і визначаємо повздовжню силу на кожній із ділянок:

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = F_1 = 30 \text{ кН}$$

$$N_3 = F_1 = 30 \text{ кН}$$

$$N_4 = F_1 - F_2 = -8 \text{ кН}$$

$$N_5 = F_1 - F_2 - F_3 = -50 \text{ кН}$$

Будуємо епюру повздовжніх сил не дотримуючись масштабу (рис.2,б).

2 Розраховуємо значення нормальних напруг:

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = 0$$

$$\sigma_2 = N_2 / A_1 = 158 \text{ Н/мм}^2 = 158 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = N_3 / A_2 = 96,8 \text{ Н/мм}^2 = 96,8 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = N_4 / A_2 = -25,8 \text{ Н/мм}^2 = -25,8 \text{ МПа}$$

$$\sigma_5 = N_5 / A_2 = -163 \text{ Н/мм}^2 = -163 \text{ МПа}$$

Будуємо епюри нормальних напруг (рис.2, в)

## Лекція 10 Кручення. Крутний момент та побудова його епюри

### План:

- 1 Крутний момент та його епюри
- 2 Умова міцності при крученні
- 3 Розрахунки на міцність при крученні

### 1 Крутний момент та його епюри

Крутний момент та його епюри.

Кручення – це один з простих видів навантаження (деформування) бруса, при якому у поперечному перерізі бруса діє тільки *внутрішній крутний момент* ( $T_x \neq 0$ ). Брус, навантажений крутним моментом, називають *валом* (незалежно від форми перерізу).

Розглянемо задачу кручення круглого валу (рис.1)

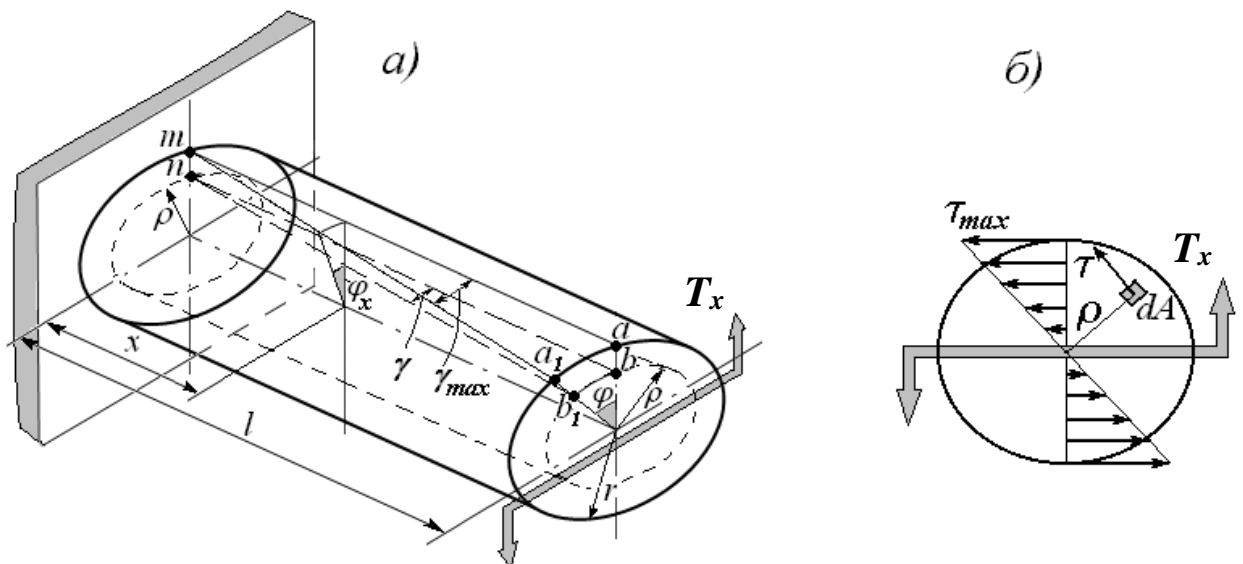


Рис.1

Теоретичні і експериментальні дослідження деформації кручення круглого валу дають підстави прийняти таку геометричну модель (рис.1, а):

- 1 Ось вала при крученні залишається прямолінійною.
- 2 Поперечні перерізи вала, плоскі до деформації, залишаються в своїй площині і лише повертаються навколо осі вала. Таким чином, відстані між поперечними перерізами вала у процесі деформації не змінюються.
- 3 Радіуси перерізу залишаються при крученні прямолінійними.

Кручення у відповідності з цією моделлю подається як результат зсувів, визначених взаємним обертанням перерізів. Кут закручення  $\varphi_x$  вважаємо лінійною функцією  $x$ , тобто *погонний (відносний) кут закручення*  $\theta$  не змінюється по довжині вала:

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{\varphi}{l} = \text{const}$$

Зробимо переріз на довільній відстані  $x$  від затиснення (рис 1, а). При зсуві в поперечних перерізах вала виникають тільки дотичні напруження. Виділимо на перерізі (рис. 1, б) нескінченно малу площадку  $dA$  на відстані  $\rho$  від осі вала. Дотична сила  $\tau dA$ , яка діє на цій площадці, створює відносно осі вала елементарний момент  $dT_x = \tau dA \cdot \rho$ . Повний момент внутрішніх сил (*внутрішній крутний момент*)

$$T_x = \int_A \tau \cdot \rho dA.$$

У цьому рівнянні шуканою величиною є закон розподілу дотичних напружень  $\tau$ , а момент  $T_x$  вважаємо вже визначеним за зовнішніми навантаженнями з умов рівноваги відрізаної частини вала.

Загальна формула дотичних напружень у довільній точці перерізу закручуваного вала:

$$\tau = \frac{T_x \cdot \rho}{I_p}$$

Таким чином, дотичні напруження при крученні зростають за лінійним законом пропорційно відстані точки перерізу від осі вала, згідно з епюрою  $\tau$  (рисунок 1, б). В точках, однаково віддалених від осі, напруження  $\tau$  рівні за величиною, а спрямовані перпендикулярно радіусу-вектору даної точки.

Максимальні напруження діють у найвіддаленіших від осі точках перерізу, при  $\rho = \rho_{\max} = r$ :

$$\tau_{\max} = \frac{T_x \cdot r}{I_p} = \frac{T_x}{W_p},$$

де  $W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярний момент опору.

## 2 Умова міцності при крученні

$$\tau_{\max} = \frac{T_{x\max}}{W_p} \leq [\tau],$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження при крученні;  $[\tau] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]$ .

Розглянемо приклади визначення крутного моменту та принципи побудови їх епюр.

### Задача

Для заданого сталевго валу постійного по довжині, визначити значення моментів  $M_2$  і  $M_3$ , які відповідають потужностям  $P_2$  і  $P_3$ , а також зрівноважуючий момент  $M_1$ ; побудувати епюру крутних моментів; визначити розмір діаметру валу із розрахунків на міцність при крученні, вважаючи поперечний переріз валу – круг (рис. 2,а).

Дано:

$$P_2 = 52 \text{ кВт}$$

$$P_3 = 50 \text{ кВт}$$

$$\omega = 20 \text{ рад/с}$$

$$M_1; M_2; M_3 - ?$$

$$M_k - ?$$

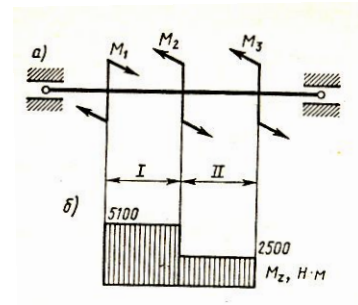


рис.2

### Розв'язання

1 Визначаємо зовнішні моменти:

$$M_2 = P_2 / \omega = 52 \cdot 10^3 / 20 = 2600 \text{ Нм};$$

$$M_3 = P_3 / \omega = 50 \cdot 10^3 / 20 = 2500 \text{ Нм}.$$

2 Зрівноважуючий момент  $M_1$  визначаємо з рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_i = 0: M_1 - M_2 - M_3 = 0; M_1 = M_2 + M_3 = 2600 + 2500 = 5100 \text{ Н м}.$$

3 Будуємо епюру крутних моментів по ділянкам валу (рис.2, б).

4 Для найбільш навантаженого перерізу, де виникає максимальний крутний момент з умови міцності визначаємо потрібний діаметр валу:

$$d_{\min} \geq \sqrt[3]{\frac{M_1}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{5100 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 30}} = 94,7 \text{ мм}$$

Округлюємо до найближчого стандартного значення  $d = 95 \text{ мм}$ .

## Лекція 11 Згин. Поперечні сили та згинаючі моменти

### План:

- 1 Поперечні сили, згинаючі моменти та їх епюри
- 2 Побудова еюр поперечних сил та згинаючих моментів

Згин – це один з простих видів навантаження (деформування) бруса, при якому у його поперечному перерізі діє *внутрішній згинальний момент* ( $M_z \neq 0$ ), внаслідок чого вісь бруса викривляється.

Брус, що працює на згин, називається *балкою*.

Згин може виникати під дією зовнішніх поперечних сил (зосереджених або розподілених по довжині бруса) та моментів пар сил (рис.1).

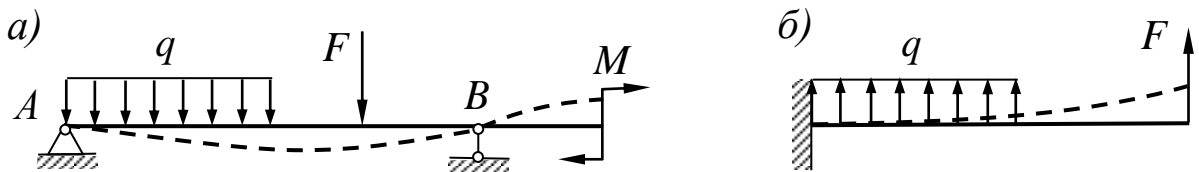


Рис.1 Приклади розрахункових схем балок при згині

Розрізняють

- *чистий згин* ( $M_z = const \neq 0, Q_y = 0$ );
- *поперечний згин* ( $M_z \neq 0, Q_y \neq 0$ ).

Якщо площина дії згинального моменту (силова площина) проходить через одну з *головних центральних осей* поперечного перерізу бруса, згин називається *плоским прямим*. При цьому викривлена вісь бруса буде плоскою кривою, яка розташована в силовій площині.

Якщо навантаження не лежать в одній силовій площині, то і викривлена вісь бруса буде просторовою кривою. У такому разі маємо *складний просторовий згин*. Таку схему навантаження можна розглядати як суперпозицію двох плоских прямих згинів, для чого усі навантаження треба розкласти на складові по головних осях інерції перерізу.

Розрахунки на міцність та жорсткість при згині починаються з того, що для заданої розрахункової схеми складають рівняння рівноваги та визначають опорні реакції.

Потім застосовують *метод перерізів*. Змінюючи поточну координату  $x$  вдовж осі балки, аналізують закономірності, за якими змінюються *внутрішні силові фактори* – поперечна сила  $Q_y$  та згинальний момент  $M_z$ , та будують їх *епюри* – графіки  $Q_y$  та  $M_z$ .

З рівнянь рівноваги будь-якої частини балки, відокремленої уявним перерізом витікають наступні практичні правила підрахунку  $Q_y$  та  $M_z$ .



Внутрішня поперечна сила  $Q_y$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відокремлену частину балки.

Внутрішній згинальний момент  $M_z$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів від навантажень, прикладених до відокремленої частини балки, відносно головної центральної осі  $Oz$  перерізу.

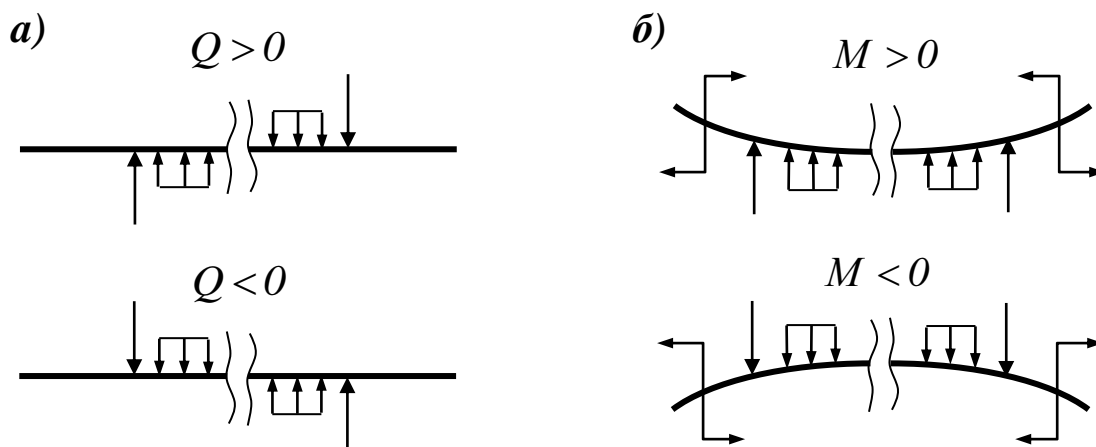


Рис. 2 Правила знаків для поперечної сили  $Q$  та згинаючих моментів  $M_z$

**Правило знаків для  $Q_y$ :** при підсумовуванні сила враховується як додатна, якщо вона намагається повернути відокремлену частину балки відносно перерізу за стрілкою годинника (рис. 2, а).

**Правило знаків для  $M_z$ :** момент враховується як додатний від тих навантажень, які згинають балку опуклістю вниз (рис.2, б).

Розглянемо приклади визначення поперечних сил та згинаючих моментів балки при згині.

**Задача.**

Визначити поперечні сили та згинаючі моменти балки. Побудувати їх епюри (рис.3,а)

**Дано:**

- $F_2 = 1 \text{ кН}$
- $F_1 = 2 \text{ кН}$
- $M = 12 \text{ кН м}$
- $h/b = 2$
- $Q_y - ?$

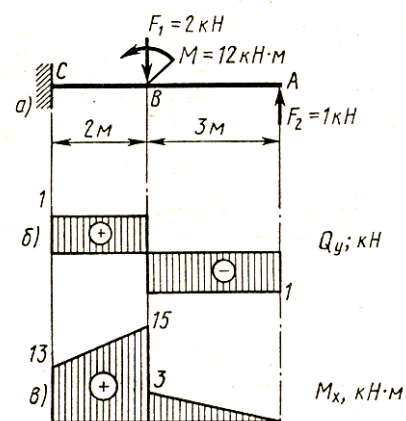


Рис.3

## Розв'язання

1. Розбиваємо балку на ділянки і на кожній з них розраховуємо поперечні сили та згинаючі моменти:

1 ділянка:  $0 \leq z \leq 3$

$$Q_{y1} = -F_2 = -1 \text{ кН}$$

$$M_{x1} = F_2 z$$

$$M_x(0) = 0$$

$$M_x(3) = 3 \text{ кН м}$$

2 ділянка:  $3 \leq z \leq 5$

$$Q_{y2} = -F_2 + F_1 = -1 + 2 = 1 \text{ кН}$$

$$M_{x1} = F_2 z + M - F_1 (z - 3)$$

$$M_x(0) = 3 + 12 - 0 = 15 \text{ кН м}$$

$$M_x(3) = 5 + 12 - 2(5 - 3) = 13 \text{ кН м}$$

2. Будуємо епюри поперечних сил (рис. 3,б) та згинаючих моментів (рис.3, в) у довільному масштабі.

## Лекція 12 Нормальні напруги при згині. Розрахунки на міцність при згині

План:

- 1 Нормальні напруження при згині
- 2 Умова міцності при згині
- 3 Розв'язання задач на побудову внутрішніх силових факторів та розрахунків на міцність при згині.

### 1 Нормальні напруження при згині

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z},$$

тобто вони змінюються пропорційно відстані від нейтрального слою.

Максимальні значення нормальні напруження будуть мати при максимальній відстані від нейтральної осі

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{I_z}.$$

Відношення  $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$  – осьовий момент опору.

Для круглого перерізу  $y_{\max} = \frac{d}{2}$ .

$$W_z = \frac{\pi d^4}{64d} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

**2 Умова міцності при згинанні має вигляд**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

Розглянемо принципи визначення нормальних напруг при згині.

**Задача:** Для заданої консольної балки побудувати епюри поперечних сил та згинаючих моментів. Для перерізу, вказаної форми, розрахувати розміри.

**Дано:**

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$F_2 = 1 \text{ кН}$$

$$F_1 = 2 \text{ кН}$$

$$M = 12 \text{ кН м}$$

$$\frac{h}{b} = 2$$

$$Q_y - ?$$

$$M_x - ?$$

$$h \times b ?$$

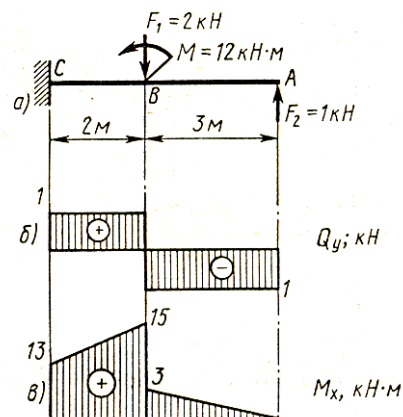


рис.3

### Розв'язання

3. Розбиваємо балку на ділянки і на кожній з них розраховуємо поперечні сили та згинаючі моменти:

**1 ділянка:  $0 \leq z \leq 3$**

$$Q_{y1} = -F_2 = -1 \text{ кН}$$

$$M_{x1} = F_2 z$$

$$M_x(0) = 0$$

$$M_x(3) = 3 \text{ кН м}$$

**2 ділянка:  $3 \leq z \leq 5$**

$$Q_{y2} = -F_2 + F_1 = -1 + 2 = 1 \text{ кН}$$

$$M_{x2} = F_2 z + M - F_1 (z - 3)$$

$$M_x(3) = 3 + 12 - 0 = 15 \text{ кН м}$$

$$M_x(5) = 5 + 12 - 2(5 - 3) = 13 \text{ кН м}$$

4. Будуємо епюри поперечних сил (рис. 3,б) та згинаючих моментів (рис. 3,в) у довільному масштабі.

5. Для найбільш навантаженого перерізу, де виникає  $M_{x_{max}} = 15 \text{ кН м}$ , розрахуємо розміри із умови міцності:

6.

$$W_x = M_{x_{max}} / [\sigma] = 93700 \text{ мм}^3$$

Так як для прямокутника (заданої форми перерізу балки)  $W_x = hb^2/6$ ; з врахуванням, що  $h/b=2$ , звідки  $h = 2b$ .

$$\text{Тоді } W_x = h(2b)^2/6 = 4b^2/6$$

$$b = \sqrt[3]{6W_x/4} = \sqrt[3]{6 \cdot 93700/4} = 52 \text{ мм}$$

$$h = 2b = 2 \cdot 52 = 104 \text{ мм.}$$

### Лекція 13 Основні поняття з деталей машин.

#### План:

- 1 Загальні поняття та визначення
- 2 Поняття про систему допусків та посадок
- 3 Основні вимоги до машин та їх деталей
- 4 З'єднання деталей
- 5 З'єднання клеєм, пайкою, заклепками
- 6 Механічні передачі обертального руху
- 7 Пасові та фрикційні передачі

#### **1 Загальні поняття та визначення**

Усі вироби машинобудівних підприємств – різноманітні технічні засоби, окремі агрегати, механізми, прилади та інші конструкції – складаються з деталей. При цьому **деталь** визначають як елемент конструкції, який виготовлено з матеріалу однієї марки без використання складальних операцій (наприклад, деталями є болт, гайка, шайба та ін.).

Сукупність деталей, які з'єднані на підприємстві-виробникові з використанням складальних операцій (зварюванням, згвинчуванням, клепаанням, паянням та ін.) з забезпеченням певної сумісної роботи, називається **збірною одиницею** (наприклад, шатун тепловозного дизеля, підшипники кочення і ковзання, насоси, компресори, редуктори та ін.). В інженерній практиці досить широко використовуються поняття «комплекси» і «комплекти», під якими розуміють сукупності збірних одиниць, що виготовлені на підприємстві і забезпечують виконання певних функцій у складі відповідної конструкції після складання її на місці призначення

(наприклад, насосні станції, дизель-генераторні станції, автоматизовані верстатні лінії, комплекти запасних частин та ін.).

Слід мати на увазі, що основою розроблення різноманітних конструкцій сучасних технічних засобів є використання в основному (за винятком спеціальних) однакових деталей та збірних одиниць – типових, нормальних і стандартних: роз'ємні та нероз'ємні з'єднання деталей, механічні передачі, вали, опори, ущільнення, муфти та ін. Це визначило необхідність виділення їх класифікаційних груп, розроблення відповідних інженерних методів для їх розрахунків і конструювання.

У машинобудуванні для виготовлення деталей машин застосовують чорні та кольорові метали, їх сплави, комбіновані та неметалічні матеріали. До чорних металів належать **сталі та чавуни**. До кольорових – **сплави на основі міді (латуні, бронзи), сплави на основі олова (бабіти), алюмінієві сплави, титанові сплави**. До комбінованих – **композитні, армовані, металокерамічні** тощо. До неметалічних матеріалів – **насамперед пластмаси, гума**.

**2** Поверхні деталей бувають циліндричні, плоскі, конічні, евольвентні, складні та ін.. Крім того, розрізняють поверхні спряжені і не спряжені. **Спряжені** - це поверхні, по яких деталі з'єднуються в складальні одиниці, а складальні одиниці - в механізми. Не спряжені, чи вільні, - це конструктивно необхідні поверхні, не призначені для з'єднання з поверхнями інших деталей.

Посадка - це характер з'єднання деталей, який визначається величиною що зазорів (S) або натягів (N), утворюються в ньому.

В залежності від розташування полів допусків отвору і валу посадки поділяють на три групи:

- посадки з зазором (рис.1.1, а, б) - поле допуску отвору розташовано вище поля допуску вала;
- посадки з натягом (рис.1.1, в, г) - поле допуску вала розташовано вище поля допуску отвору;
- посадки перехідні (рис.1.1, д) - поля допусків отвору і валу частково або повністю перекриваються.

Посадка позначається на складальному кресленні у вигляді дробу, у чисельнику якої, відхилення відносяться до отвору, а в знаменнику - до валу наприклад  $\text{Ø}80 \frac{+0,046}{-0,060}$  де верхнє відхилення отвору  $ES = + 0046$  мм; нижнє відхилення  $EI = 0$ ; верхнє відхилення вала  $es = - 0,060$  мм; нижнє відхилення  $ei = - 0,106$  мм.

### Параметри посадки з зазором

Зазором (S) називається позитивна різниця розмірів отвору і вала, коли  $D > d$ :  $S = D - d$ . Посадка із зазором (рис.5.1, а, б) характеризується граничними зазорами:

- найменшим (гарантованим)  $S_{\min} = D_{\min} - d_{\max}$ ;
- найбільшим  $S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}$ ;

- середнім  $S_{cp} = \frac{S_{max} + S_{min}}{2}$ .

Через відхилення граничні зазори обчислюються наступним чином:

$S_{min} = EI - es$ ;

$S_{max} = ES - ei$ .

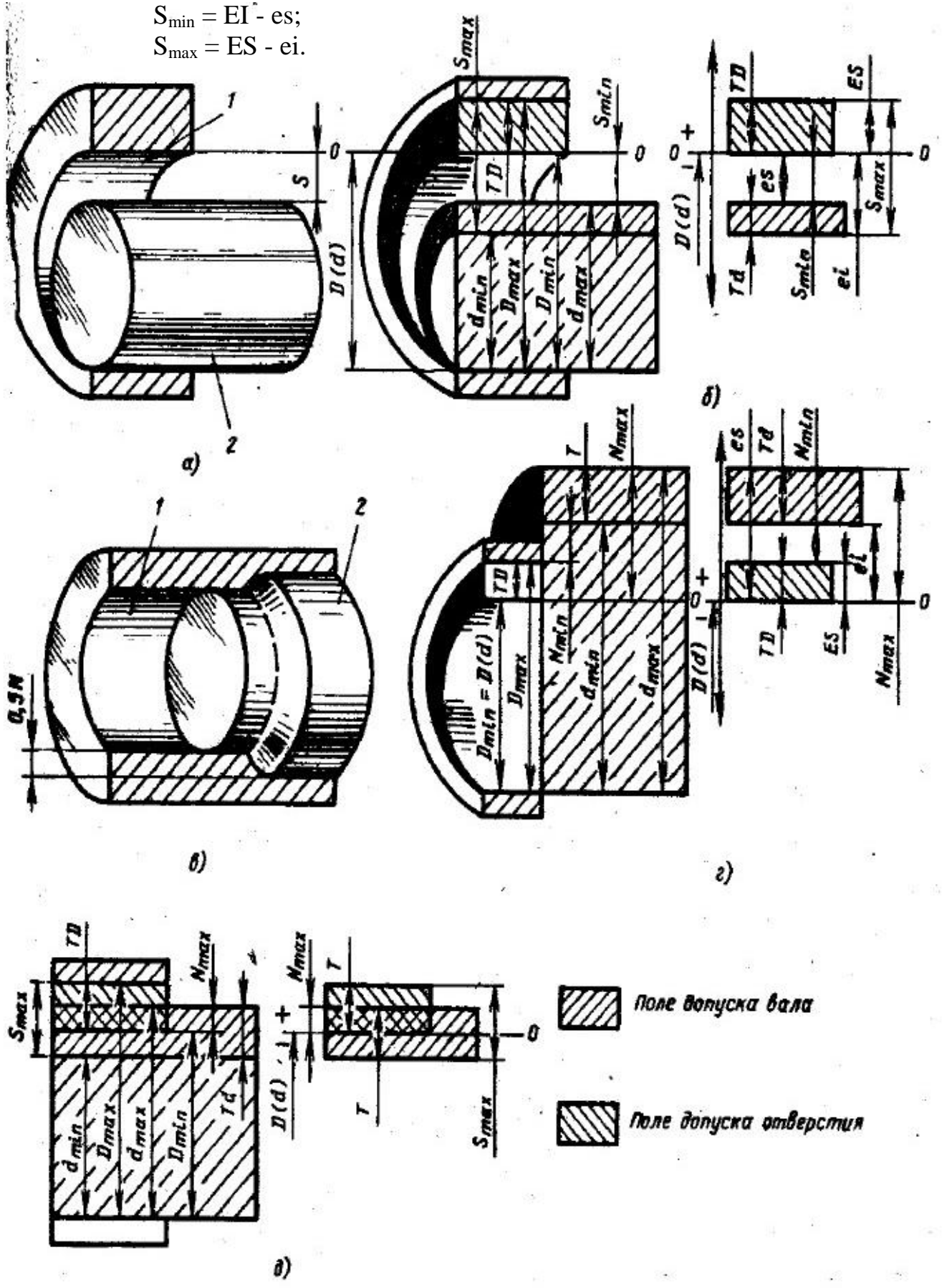


Рисунок 1.1 З'єднання валу 2 та отвору 1: а) з зазором, в) з натягом; поля допусків посадки: б) з зазором, г) з натягом, д) перехідної посадки

### Параметри посадки з натягом

Натягом (N) називається позитивна різниця розмірів вала та отвору, коли  $d > D$ :  $N = d - D (= - S)$ .

Посадка з натягом (рис.5.1 , в, г) характеризується граничними натягами:

- найменшим (гарантованим)  $N_{\min} = d_{\min} - D_{\max}$ ;
- найбільшим  $N_{\max} = d_{\max} - D_{\min}$ ;
- середнім  $N_{\text{cp}} = \frac{N_{\max} + N_{\min}}{2}$ .

Через відхилення граничні натяги обчислюються наступним чином:

$$N_{\min} = e_i - ES;$$

$$N_{\max} = es - EI.$$

### Параметри перехідної посадки

Перехідні посадки мають можливість отримати при збиранні з'єднання як зазори, так і натяги. У цьому випадку поля допусків отвору і валу перекриваються частково або повністю. Такі посадки характеризуються найбільшим зазором ( $S_{\max}$ ) та найбільшим натягом ( $N_{\max}$ ), величини яких розраховуються за формулами, наведеними вище.

Якщо при розрахунку параметрів перехідної посадки величина  $S_{\max} > N_{\max}$ , то визначають середній зазор за формулою  $S_{\text{cp}} = \frac{S_{\max} - N_{\max}}{2}$ , і тоді про переходну посадку кажуть, що вона з вірогідністю зазору.

Якщо при розрахунку вийшло, що величина  $N_{\max} > S_{\max}$ , то визначають середній натяг за формулою  $N_{\text{cp}} = \frac{N_{\max} - S_{\max}}{2}$ , а про посадку кажуть, що вона з імовірністю натягу.

### Допуск посадки

Допуск посадки (ТП) дорівнює сумі допусків отвору і валу, які утворюють з'єднання:  $TP = TD + Td$ . Визначимо величину допуску посадки через її параметри - наприклад, для посадки з зазором.

Зі схеми полів допусків посадки з зазором, см. рис.5.1, б, маємо:

$$S_{\max} = S_{\min} + TD + Td.$$

Величина зазору змінюється в межах від  $S_{\min}$  до  $S_{\max}$ . Різниця граничних значень розміру дорівнює його ж допуску, тоді різниця граничних зазорів дорівнює допуску зазору  $TS = S_{\max} - S_{\min}$ . Так як  $S_{\min} = EI - es$ ;  $S_{\max} = ES - e_i$ , то

$$TS = S_{\max} - S_{\min} = ES - e_i - (EI - es) = (ES - EI) + (es - e_i) = TD + Td.$$

Отже, для посадок з зазором допуск посадки дорівнює допуску зазора або різниці зазорів:  $TP = TS = S_{\max} - S_{\min} = TD + Td$ .

Аналогічно для посадок з натягом, враховуючи, що  $N_{\min} = e_i - ES$ ,

$N_{\max} = es - EI$ , можна сказати, що допуск посадки дорівнює допуску натягу або різниці натягів:

$$ТП = TN = N_{\max} - N_{\min} = TD + Td.$$

Допуск перехідної посадки відповідно дорівнює:

$$ТП = S_{\max} + N_{\max} = TD + Td.$$

### 3 З'єднання деталей

Деталі, що складають конструкцію технічного засобу, пов'язуються між собою відповідними способами, які отримали назву **зв'язки**. Вони розділяються на **рухомі** і **нерухомі**. Наявність рухомих зв'язків у механізмах і машинах (кінематичні пари – наприклад, різні шарніри, зубчасте зачеплення) обумовлена їх кінематичними схемами. Формування нерухомих зв'язків визначається необхідністю розділення загальної конструкції технічного засобу на вузли і деталі для спрощення виробництва, полегшення складання, ремонту та транспортування. Нерухомі зв'язки мають назву **з'єднання**.

З'єднання є важливими елементами машинобудівних конструкцій. Досвід експлуатації транспортних технічних засобів виявив, що велика кількість відмов у їх роботі пов'язана з незадовільною якістю з'єднань. Тому основним критерієм працездатності з'єднань (а також відповідних розрахунків) є міцність.

За ознакою роз'ємності всі види з'єднань можна розділити на **роз'ємні** і **нероз'ємні**.

До роз'ємних з'єднань, які можуть розбиратися без руйнування деталей, що їх складають, належать: різьбові з'єднання; шпонкові з'єднання; шліцьові з'єднання; профільні з'єднання; штифтові з'єднання; клинові з'єднання.

До нероз'ємних з'єднань, які не можуть розбиратися без руйнування деталей, що з'єднуються, або їх поверхонь, належать: зварні з'єднання; заклепкові з'єднання; з'єднання з натягом; паяні з'єднання; клейові з'єднання.

#### Роз'ємні з'єднання

**Різьбові з'єднання.** Різьба (рис 1) – це виступи, утворені на основній поверхні гвинтів або гайок і розташовані за гвинтовою лінією.

Різьбові з'єднання є одними з найбільш поширених роз'ємних з'єднань, які здійснюються за допомогою деталей, що мають зовнішню (болти, гвинти, шпильки та ін.) і внутрішню (гайки, різьбові отвори в корпусних деталях) різьбу.

До **переваг** різьбових з'єднань слід віднести високу надійність, зручність складання та розбирання, можливість утворення великих осьових навантажень, відносно невелику вартість, що обумовлюється



стандартизацією та масовим виробництвом кріпильних різьбових деталей. **Недоліком** слід вважати концентратори напружень у западинах різьби, що знижує втомлену міцність різьбового з'єднання, а також необхідність застосування в багатьох випадках засобів стопоріння (для запобігання саморозгвинчування з'єднання).

**За формою основної поверхні** розрізняють циліндричні та конічні різьби. У машинобудуванні найбільш поширені циліндричні різьби. Конічну різьбу застосовують для щільних з'єднань труб, пробок тощо.

**За формою профілю різьби** розрізняють трикутну (відповідний контур  $abc$  на рис 1,  $a$ ), прямокутну, трапецеїдальну, круглу та інші різьби.

**За напрямком гвинтової лінії** розрізняють праву (найбільш поширену) і ліву різьби.

**За числом заходів** відрізняють однозахідну (найбільш поширену), двозахідну та інші різьби. Багатозахідні різьби застосовуються в гвинтових

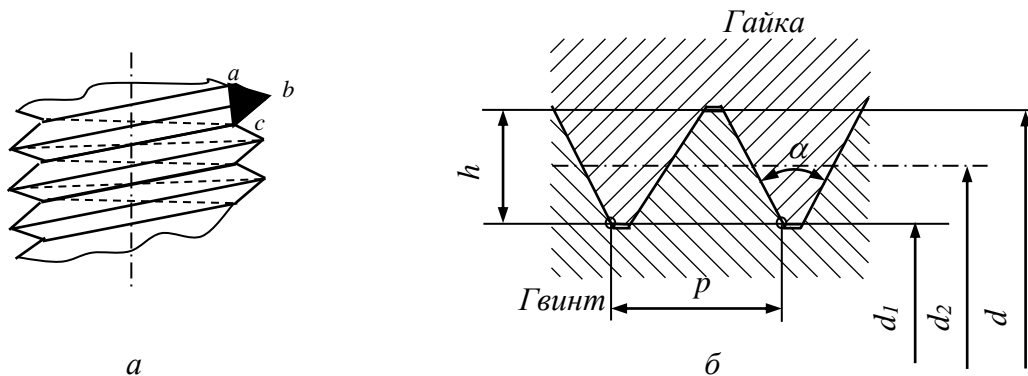


Рис.1

механізмах.

Усі геометричні параметри різьб і допуски на їх розміри регламентуються відповідними стандартами.

**За призначенням** розрізняють різьби кріпильні і різьби ходові (для гвинтових механізмів). До **кріпильних різьб** належать різьба **метрична** з трикутним профілем ( $\alpha=60^\circ$ ) – основна кріпильна різьба; **трубна** ( $\alpha=55^\circ$ ) – із округленими вершинами і западинами (ГОСТ 6357-73); **кругла** (ГОСТ 6042-71) та ін. До **ходових різьб** належать трапецеїдальна симетрична (ГОСТ 9484-73) і упорна (ГОСТ 10177-62), прямокутна різьби.

## Шпонкові з'єднання

Шпонкове з'єднання (рис.2) здійснюється за допомогою спеціальної

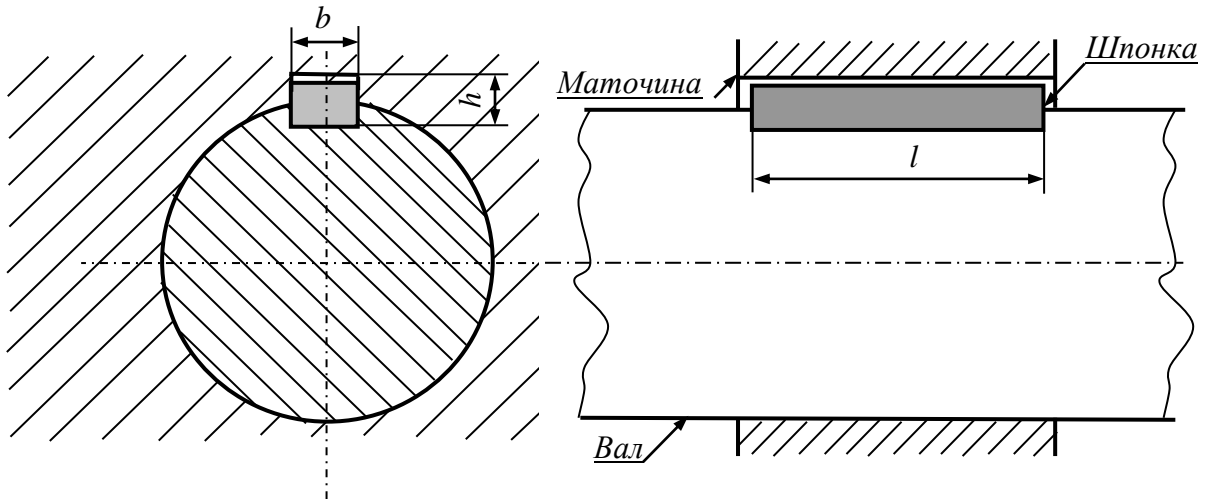


Рис 2.

деталі – шпонки, яка закладається у відповідні пази, що виконані на сполучених поверхнях деталей, що з'єднуються. Воно забезпечує нерухоме скріплення деталей для передачі крутного моменту.

До **переваг** шпонкових з'єднань слід віднести простоту і надійність конструкції, зручність складання і розбирання, невисоку вартість. **Недоліки** з'єднання визначаються ослабленням суцільних перерізів сполучених деталей і наявністю концентраторів напружень.

Найбільш поширені в машинобудівних конструкціях такі **типи шпонок** (рис.3):

- клинова врізна (ГОСТ 8791-68), створює напружений стан за верхньою та нижньою гранями шпонки і передає крутний момент за рахунок сил тертя на них (рис.3, а);
- призматична звичайна з округленими кінцями (ГОСТ 8789-68), сприймає навантаження бічними гранями (рис.3, б);
- призматична напрямна врізна із закріпленням на валу (ГОСТ 8790-68), допускає переміщення маточини вздовж осі валу (рис.3, в);
- сегментна (ГОСТ 8794-68) (рис.3, г);
- кругла (не стандартизована) (рис.3, д).

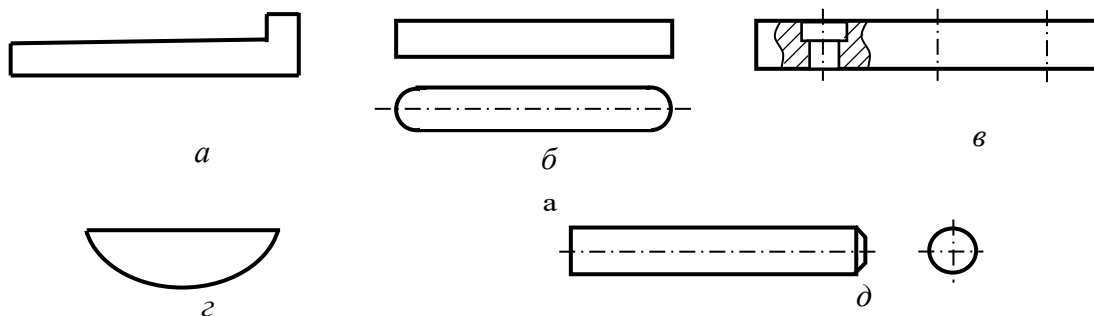


Рис.3

Призматичні звичайні шпонки (рис.2) працюють на зминання бокових граней та зрізання.

Розміри поперечного перерізу шпонки ( $b \times h$ ) вибираються з таблиць стандарту залежно від діаметра вала  $d$ , довжина шпонки визначаються з умов попередження тільки зминання.

Для виготовлення шпонок застосовується чистотягнутий прокат для шпонок зі сталей за ГОСТ 380-71 та ГОСТ 1050-74 з границею міцності не нижче 500 МПа. При сталевій маточині приймається  $[\sigma_{зМ}] = 80 \dots 100$  МПа, при чавунній маточині приймається  $[\sigma_{зМ}] = 45 \dots 55$  МПа. Значення  $[\tau_{зР}]$  приймається в залежності від характеру навантаження – для спокійного навантаження  $[\tau_{зР}] = 120$  МПа, для помірних поштовхів  $[\tau_{зР}] = 85$  МПа, для ударного навантаження  $[\tau_{зР}] = 50$  МПа.

### Шліцьові з'єднання

Шліцьове з'єднання (рис.4) можна умовно уявити як багатошпонкове, у якого шпонки виготовлені безпосередньо на валу. Призначається для передачі значних крутних моментів. За допомогою шліцьового з'єднання забезпечується як нерухоме, так і рухоме (з відносним осьовим переміщенням сполучених поверхонь) скріплення деталей.

До переваг шліцьових з'єднань слід віднести більшу міцність шліцьових валів у порівнянні зі шпонковими, а також краще центрування деталей. Недоліком слід вважати складність виготовлення шліцьових валів і збільшення концентраторів напружень.

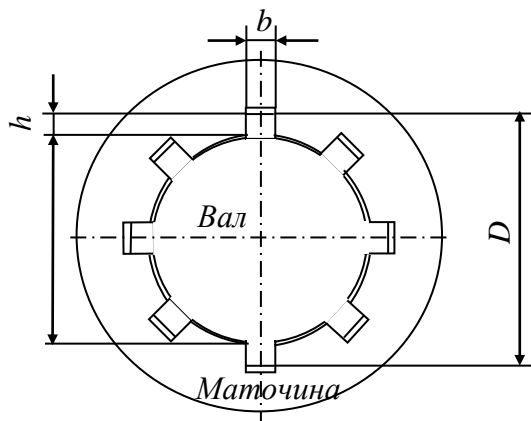


Рис.4

Основними типами шліцьових з'єднань є прямобічні (ГОСТ 1139-58), евольвентні (ГОСТ 6033-51) і трикутні (регламентовані відповідними нормальними) з'єднання.

Шліцьове з'єднання розраховується на зминання бокових граней шліців. Нерівномірність розподілу навантаження між шліцами ураховується через коефіцієнт  $\psi=1,2\dots1,3$ . Максимальний крутний момент визначається за формулою

$$T_{\max} = z \cdot h \cdot l \frac{D+d}{\psi} [\sigma_{3M}],$$

де  $z$  – число шліців;

$h$  – висота поверхні контакту;

$l$  – робоча довжина шліца, яка дорівнює довжині маточини деталі, що з'єднується з валом;

$[\sigma_{3M}]$  – допустиме напруження зминання, для термообробленої сталі, для якої границя міцності не нижче 500 МПа, приймається для нерухомих з'єднань  $[\sigma_{3M}] = 100\dots140$  МПа, а для рухомих під навантаженням –  $[\sigma_{3M}] = 5\dots15$  МПа.

## 5 Механічні передачі обертального руху

**Механічна передача** – механізм, що перетворює задані кінематичні та енергетичні параметри двигуна на потрібні параметри руху робочих органів машин та призначений для погодження режиму роботи двигуна з режимом роботи виконавчих органів. Класифікація механічних передач наведена в таблиці.

### Основні і похідні параметри механічних передач

Незалежно від типу та конструкції в будь-якій механічній передачі можна виділити два вали, які називають у напрямку передачі потужності **вхідним** (ведучим) та **вихідним** (веденим) (рис.1).

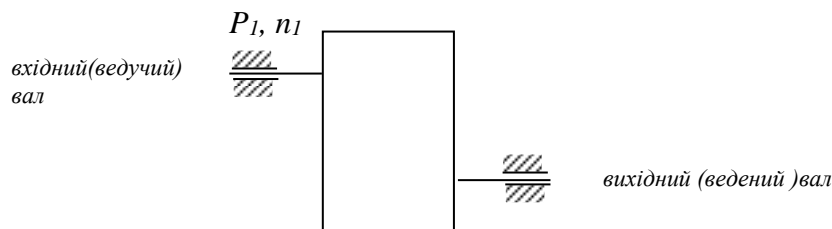


Рис.1

Цим валам приписують **основні параметри** – потужність  $P$  (кВт) і частота обертання  $n$  ( $\text{хв}^{-1}$ ). Параметри вхідного (ведучого) вала мають індекс 1, параметри вихідного (веденого) вала – 2.

Крім основних параметрів, роботу механічної передачі характеризують **похідні параметри**:

– передаточне число

$$u = \frac{n_1}{n_2};$$

– коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1};$$

– кутова швидкість обертання вала,  $rad/c$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

При відомій потужності і частоті обертання на валу можна визначити крутний момент,  $H \cdot m$  або  $\frac{kBm}{xv^{-1}}$ .

$$T = \frac{P}{\omega};$$

$$T = 9550 \frac{P}{n}.$$

У залежності від співвідношення параметрів вхідного і вихідного валів передачі поділяються:

- на редуктори (знижуючі передачі) – від вхідного вала до вихідного зменшують частоту обертання ( $n_1 > n_2$ ) і збільшують крутний момент ( $T_1 < T_2$ ); передаточне число передачі  $u > 1$ ;
- на мультиплікатори (підвищуючі передачі) – від вхідного вала до вихідного збільшують частоту обертання ( $n_1 < n_2$ ) і зменшують крутний момент ( $T_1 > T_2$ ); передаточне число передачі  $u < 1$ .

## Основна література

- 1 Аркуша А.И., Фролов М.И. Техническая механика: Учебник для машиностроит. спец. техникумов. – М.: Высш. Шк., 1983.-447 с.
- 2 Мовнин М.С. и др. Основы технической механики: Учебник для технологических немашиностроительных спец. техникумов/М.С. Мовнин, А.Б.Израелит, А.Г.Рубашкин.-3-е изд., перераб. и доп. - Л.: Машиностроение, 1990. -288с.: ил.
- 3 Мовнин М.С. и др. Руководство к решению задач по технической механике. Учебн. пособие для техникумов. М., «Высшая школа», 1977. – 400с.: ил.
- 4 М.С. Мовнин, Д. Г. Гольцикер Техническая механика, Ч.3 Детали машин. Учебн. пособие для техникумов.- Ленинград изд. "Судостроение", 1966
- 5 Никитин Е.М. Теоретическая механика для техникумов.- 12-е изд., испр.- М.: Наука, 1988. -336 с.
- 6 Федуліна А.І. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Вища школа., 2005.- 319 с.: іл..

## Додаткова література

- 7 Йосилевич Г.Б., и др.. Прикладная механика: Для студентов вузов/ Г.Б. Йосилевич, П.А. Лебедев, В.С. Стреляев.- М.: Машиностроение, 1985.- 576 с.: ил.
- 8 Ицкович Г.М. Сопротивление материалов: Учеб. для учащихся машиностроит. Техникумов.-7-е изд., испр. - М.: Высшая шк., 1986.-352 с.: ил.