Міністерство освіти і науки України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
__________Л.М. Рославець
_____ ___________2018 р.

Методичне забезпечення практичних занять з дисципліни Вища математика для студентів II курсу спеціальності

071 «Облік і оподаткування»

Уклав Кузьменко О.М.

Розглянуто на засіданні циклової комісії
спеціальних механічних та загально-технічних дисциплін

Протокол №__ від ___ _________ 20__ року

Голова циклової комісії_______________ Т.І. Семерня

Практичне заняття 1

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Мета: вивчити метод розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Виховувати вміння індивідуальної роботи

Методи: словесний, практичний

План:

1 Обчислення визначників
2 Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Студенти повинні знати:

- методи обчислення визначників;
- формули Крамера.
-

Студенти повинні уміти:

- обчислювати визначники різними методами;
- розв'язувати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, робочі зошити

Література:

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001.-С. 6-12.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

(коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, і вільні члени b_1, b_2 і b_3 вважаються заданими).

Коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3 в системі (1) позначаються однією буквою a з двома індексами, де перший відповідає номеру рівняння, а другий – номеру невідомого.

Щоб розв'язати систему (1), із коефіцієнтів при невідомих і вільних складаються визначники третього порядку Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Визначник Δ, який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Визначники Δ_1, Δ_2, і Δ_3, утворюються з визначника (2) відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв'язуванні системи рівнянь (4) можуть бути такі три випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система (4) має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (3)$$

Формули (3) називають *формулами Крамера*.

1. Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 не дорівнює нулю, то система (4) розв'язків не має.
2. Якщо $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, то система (1) має безліч розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

Розв'язування.

Знаходимо визначники Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами (3)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11. \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$

Практичне заняття 2

Тема: Матриці. Дії над матрицями та їх властивості.

Мета: Вивчення основних понять теорії матриць та матричного методу розв'язування системи лінійних рівнянь. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Основні означення.
2 Дії над матрицями та їх властивості.
3 Обернена матриця.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
калькулятори

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.- с 13-18, 24-25.

Теоретичні відомості:

Тема: Матриці. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця.

Матриці. Основні дії над матрицями.

Матрицею називається прямокутна таблиця з чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Матриця $\mathbf{A}$ з елементами a_{ij} розміру $m \times n$ має m рядків та n стовпців і позначається так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця містить однакову кількість рядків і стовпців вона називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*.

Матриця, у якої всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якої всього один стовпець, – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ – *побічну діагональ*.

Якщо в матриці $\mathbf{A}$ поміняти місцями рядки і стовпчики, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці* $\mathbf{A}$ і позначається $\mathbf{A}^T$.

Квадратна матриця, в якої всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею.

Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця $\boldsymbol{O}$ називається нульовою, якщо всі її елементи є нулями:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} .$$

Якщо $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – матриці одного розміру, то вони вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.

Сумою матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ є матриця $\mathbf{C}$ з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ на число k є матриця $\mathbf{B}$ з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ розміру $m \times n$ на матрицю $\mathbf{B}$ розміру $n \times k$ є матриця $\mathbf{C}$, розміром $m \times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij}, який стоїть в i-му рядку та j-му стовпці матриці $\mathbf{C}$, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці $\mathbf{A}$ на відповідні елементи j-го стовпця матриці $\mathbf{B}$). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків другої матриці $\mathbf{B}$. Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Слід відзначити, що AE = EA = A.

Будь-якій квадратній матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником цієї матриці* і позначається символом det A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Прямокутна матриця визначника не має.

Виконуються такі властивості додавання та множення матриць:

$E{\cdot}A = A{\cdot}E = A$ (властивість множення на одиничну матрицю);

$O{\cdot}A = A{\cdot}O = O$ (властивість множення на нульову матрицю);

$k{\cdot}O = O{\cdot}k = O$ $A+O = O+A = A$;

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$;

$A+B = B+A$ (комутативна властивість додавання);

$A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативна властивість додавання);

$(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$;

$\alpha(AB) =(\alpha A)B$;

$(A+B)C = AC+BC$; $C(A+B) = CA+CB$.

Приклад. Знайти матрицю $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Кількість стовпців матриці $\mathbf{A}_{2\times2}$ дорівнює кількості рядків матриці $\mathbf{B}_{2\times3}$, тому за означенням маємо

$$\mathbf{C}_{2\times3} = \mathbf{A}_{2\times2}\mathbf{B}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1) \\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця

Нехай $\mathbf{A}$ – деяка квадратна матриця n-го порядку.

Матриця $\mathbf{A}^{-1}$ називається *оберненою* до матриці $\mathbf{A}$, якщо виконується умова

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ *й невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. *Для існування оберненої матриці* $\mathbf{A}^{-1}$ *необхідно і достатньо, щоб матриця* $\mathbf{A}$ *була невиродженою.*

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці $\mathbf{A}$.

Приклад. Знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці $\mathbf{A}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Матриця $\mathbf{A}$ невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (7). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Складемо обернену матрицю

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Практичне заняття 3

Тема: Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Мета: Вивчення поняття оберненої матриці і матричного способу розв`язування систем рівнянь

Метод: словесний , практичний

План

1 Обернена матриця

2 Матричний метод

Студенти повинні знати: алгоритм знаходження оберненої матриці, і розв`язування системи рівнянь

Студенти повинні уміти: розв`язувати систему рівнянь матричним способом

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 24-25.

Практичне заняття 4

Тема: Розв'язування задач на пряму і площину.

Мета: Повторити та закріпити основні формули рівнянь прямих на площині і в просторі та рівнянь площин. Формувати вміння та навики застосування рівнянь прямих та площин при розв'язуванні задач.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв’язування вправ.

Студенти повинні знати:
- рівняння прямих на площині;
- рівняння площини;
- умови паралельності та перпендикулярності прямих та площин.

Студенти повинні уміти:
- складати рівняння прямих та площин;
- визначати кути між прямими та площинами, відстань від точки до прямої та площини.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, креслярські інструменти, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с. 119-144.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 76-88.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування задач на пряму і площину.

Види рівнянь на площині:

$y = kx + b$, де $k = \text{tg}\varphi$. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$ рівняння прямої, що проходить через задану точку

$\boxed{\dfrac{y - y_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$ рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, M_2 (x_2, y_2)

Якщо задано вектор $\mathbf{s} = \{l; m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді $\boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}.}$

$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,}$ рівняння прямої у відрізках на осях.

$\boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}}$ канонічне рівняння прямої.

$Ax + By + C = 0,$ загальне рівняння прямої.

Кут між прямими: $\text{tg}\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$, $\boxed{\cos\theta = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.}$

Умова паралельності прямих $k_1 = k_2.$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

Умова перпендикулярності прямих $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Відстань від точки до прямої $\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$

Загальне рівняння площини $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$ рівняння площини, що проходить через задану точку **$M_0(x_0, y_0, z_0)$** перпендикулярно до заданого вектора $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

Відстань від точки до площини $\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку (– 2, 1) і нахилена під кутом 30° до прямої $x - 2y = 3$.
2. Скласти рівняння прямої, що утворює кут 45° із прямою 3x + y – 2 = 0 та проходить через точку перетину цієї прямої з віссю ординат.
3. На прямій 3x – 3y – 7 = 0 знайти точку, рівновіддалену від точок (3, – 4) і (7, 2).
4. Координати кінців однієї зі сторін квадрата: (–3, –3) і (5, 3). Знайти рівняння його сторін.

Практичне заняття 5

Тема: Диференціювання функцій

Мета: Повторити та закріпити поняття похідної, механічний та геометричний зміст похідної, правила диференціювання. Формувати вміння та навики застосування правил диференціювання при знаходженні похідних функцій.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:
- означення похідної;
- механічний та геометричний зміст похідної;
- рівняння дотичної до графіка функції;
- правила диференціювання; таблицю похідних.
-

Студенти повинні уміти:
- знаходити похідні функцій;
- знаходити рівняння дотичної до графіка функції;
- знаходити швидкість матеріальної точки.
-

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
калькулятори, креслярські інструменти, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 205-211.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001. –С. 191-200, 204-209, 211-218.

Теоретичні відомості:

Тема: Диференціювання функцій

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ кутовий коефіцієнт дотичної

Таблиця похідних елементарних функцій

1. Похідна степеневої функції

$y = x^{\alpha}: \ y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \ \alpha \in R$

2. Похідна показникової функції

$$y = a^x: \quad y' = a^x \ln a;$$
$$y = e^x: \quad y' = e^x.$$

3. Похідна логарифмічної функції

$$y = \log_a x: \quad y' = \frac{1}{x\ln a};$$
$$y = \ln x: \quad y' = \frac{1}{x}.$$

4. Похідні тригонометричних функцій

$$y = \sin x: \quad y' = \cos x;$$
$$y = \cos x: \quad y' = -\sin x;$$
$$y = \mathrm{tg}x: \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$y = \mathrm{ctg}x: \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$:

$$y' = [f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Середня швидкість

Середня швидкість тіла, що рухається вздовж деякої лінії, визначається за формулою

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Миттєва швидкість

Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії $s = f(t)$, називається похідна функції $s = f(t)$ за часом t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).}$ рівняння дотичної до графіка функції

Знайти похідні функцій:

1. $(7x^5)' = 7(x^5)' = \underbrace{7\cdot 5}x^4 = 35x^4$

2. $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4.$

$$y' = (x^3 + 7x^2 - 5x + 4)' = (x^3)' + (7x^2)' - (5x)' + (4)' = 3x^2 + 14x - 5 + 0$$

3. $y = (x^2 + 1)\ln x.$

$$y' = \Big[\underbrace{(x^2+1)}_{u}\,\underbrace{\ln x}_{v}\Big]' = (x^2+1)'\ln x + (x^2+1)(\ln x)' = 2x\ln x + (x^2+1)\frac{1}{x}.$$

4. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-5}.$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-5}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-5) - (x^2+1)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} = \frac{2x(x^2-5) - 2x(x^2+1)}{(x^2-5)^2} = \frac{-10x - 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{-12x}{(x^2-5)^2}$$

5. $y = \sqrt{x^5 - 10^x}$;

$$g(x)=u=x^5-10^x;\ \ f(u)=\sqrt{u};$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}(5x^4-10^x\ln 10)=\frac{5x^4-10^x\ln 10}{2\sqrt{x^5-10^x}}.$$

6. $y=\cos^3(\ln 2x)\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

Візьмемо: $u=\cos^3(\ln 2x),\ v=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$. Тоді за правилом

$$y'=(\cos^3\ln 2x)'\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{x}+\cos^3(\ln 2x)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)'.$$

Функції $\cos^3\ln 2x$ і $\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ — складні.

$$(\cos^3(\ln 2x))'=3\cos^2(\ln 2x)\cdot(\cos(\ln 2x))'=$$

$$=3\cos^2(\ln 2x)(-\sin\ln 2x)(\ln 2x)'=-3\cos^2(\ln 2x)\sin\ln 2x\frac{1}{2x}\cdot 2.$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}.$$

Нехай $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ — рівняння вільного руху тіла, g — прискорення його вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу; у момент часу t = 2 с.

• За означенням маємо

$$v=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt.$$

Зокрема, якщо t = 2, дістаємо:

$v=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6$ м/с.

Написати рівняння дотичної до кривої $y=x^3$ у точці $M(1;\,1)$.

• Оскільки $y'=3x^2$, то кутовий коефіцієнт дотичної

$$y'|_{x=1}=(3x^2)\,|_{x=1}=3.$$

Рівняння дотичної буде таке: $y-1=3(x-1)$, або $y=3x-2$.

Практичне заняття 6

Тема: Дослідження функцій на екстремум. Задачі на найбільше та найменше значення функції

Мета: Повторити та закріпити достатні умови монотонності та екстремуму функцій. Формувати вміння та навики застосування диференціального числення до дослідження на монотонність, екстремуми та найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:

- правила диференціювання; таблицю похідних;
- умови монотонності та екстремуму функції.

Студенти повинні уміти:

- Досліджувати функції на монотонність, екстремуми, найбільше та найменше значення функції.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
олівець, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 226-227.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001. –С. 221-227, 236-240.

Теоретичні відомості:

Тема: Дослідження функцій на екстремум. Задачі на найбільше та найменше значення функції

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ кутовий коефіцієнт дотичної

Таблиця похідних елементарних функцій

2. Похідна степеневої функції

$$y = x^{\alpha}: \; y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \; \alpha \in R$$

2. Похідна показникової функції

$$y = a^x: \quad y' = a^x \quad \ln a;$$

$$y = e^x: \quad y' = e^x.$$

3. Похідна логарифмічної функції

$$y=\log_a x:\quad y'=\frac{1}{x\ln a};$$
$$y=\ln x:\qquad y'=\frac{1}{x}.$$

4. Похідні тригонометричних функцій

$$y=\sin x:\qquad y'=\cos x;$$
$$y=\cos x:\qquad y'=-\sin x;$$
$$y=\mathrm{tg}x:\qquad y'=\frac{1}{\cos^2 x};$$
$$y=\mathrm{ctg}x:\qquad y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Похідна складної функції $y=f(\varphi(x))$**:**

$$y'=\left(f(\varphi(x))\right)'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

1. Знайти нулі функції $f'(x)$, тобто корені рівняння $f'(x)=0$ (якщо вони є), і розбити інтервал $(a;\ b)$ за допомогою знайдених коренів $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, $a<x_1<x_2<\ldots<x_k<b$, на інтервалі $(a;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, …, $(x_{k-1};\ x_k)$, $(x_k;\ b)$.

2. Визначити знак похідної на кожному із таких інтервалів. Якщо при цьому виявиться, що на двох сусідніх інтервалах $(x_{i-1};\ x_i)$ $(x_i;\ x_{i+1})$ похідна $f'(x)$ має один і той самий знак, то функція строго монотонна в інтервалі $(x_{i-1};\ x_{i+1})$. Наприклад, якщо $f'(x)>0$, то функція $f(x)$ зростаюча, якщо $f'(x)<0$, то $f(x)$ спадна.

Строга монотонність за теоремою 6 зберігається, якщо до частинного інтервалу приєднати його кінці, на яких за умовою функція неперервна. Якщо $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ неперервна, а в інтервалі $(a;\ b)$ похідна $f'(x)$ не перетворюється на нуль, то на проміжку $[a;\ b]$ функція $f(x)$ буде строго монотонною, а саме при $f'(x)>0$ — зростаючою, при $f'(x)<0$ — спадною.

Достатні умови строгого екстремуму

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:

1) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий максимум;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку. Розглянемо деякі випадки знаходження найбільших і найменших значень функцій на проміжку, коли функція неперервна і диференційовна на всьому проміжку за винятком точок, де в неї немає скінченної похідної.

І. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$, диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a; b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).

2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов'язково виясняти, чи буде в них екстремум).

3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Знайти проміжки монотонності та екстремуми функцій:

$3x^3 - 9x^2 - 27x + 30;$

$2x^3 - 21x^2 + 36x - 20;$

$\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1;$

$-2x^3 - 15x^2 + 36x + 10;$

$x^3 - 9x^2 + 15x - 3;$

$x^3 - 3x^2 + 6x + 10;$

$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;$

Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

$y = x^2 - 4x + 3$, [0;3].

$y = x^2 - 6x + 13$, [0;6].

Практичне заняття 12

Тема: Безпосереднє знаходження невизначеного інтеграла

Мета: Повторити властивості невизначеного інтеграла та основні табличні інтеграли. Формувати вміння та навики обчислення невизначеного інтеграла методом безпосереднього інтегрування. Виховувати вміння індивідуального

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:

- Таблицю невизначених інтегралів.

-

Студенти повинні уміти:

- Знаходити первісну;
- Знаходити невизначений інтеграл за допомогою табличних інтегралів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
олівець, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 253-255.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001. –С. 252-255.

Теоретичні відомості:

Тема: Безпосереднє знаходження невизначеного інтеграла

Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \quad a \neq 0 \text{ – стала.}$$

2. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то й $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

1) $\int f(kx)dx = \dfrac{1}{k}F(kx) + C$,

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$,

3) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C$,

де k та b - сталі величини.

Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{1-6x+4x^2}{x}dx$, 2) $\int \dfrac{dx}{x^2+16}$, 3) $\int \dfrac{3x-5-24x^2}{x}dx$, 4) $\int (3x^2+4)dx$.

5)

$$\int\left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}\right)dx.$$

$$\int\left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}\right)dx = \int x^2dx - \int 2x\sqrt{x}dx + \int 3\sqrt[3]{x}dx + \int\frac{5}{x}dx = \int x^2dx - 2\int x^{3/2}dx + 3\int x^{1/3}dx +$$

$$+5\int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{4/3}}{4/3} + 5\ln|x| + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\ln|x| + C.$$ 6)

$$\int\left(5^x - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

$$\int\left(5^x - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int 5^x dx - 3\int\frac{dx}{\cos^2 x} + 4\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5^x}{\ln 5} - 3tgx + 4\arcsin x + C.$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x} + 2x - x^4}{x^5}dx.$$

7)

$$\int\frac{\sqrt[3]{x} + 2x - x^4}{x^5}dx = \int\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx + 2\int\frac{x}{x^5}dx - \int\frac{x^4}{x^5}dx = \int\left(x^{-\frac{14}{3}} + 2x^{-4} - x^{-1}\right)dx = \frac{x^{-11/3}}{-11/3} + 2\frac{x^{-3}}{-3} -$$

$$-\ln|x| + C = -\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}} - \frac{2}{3x^3} - \ln|x| + C.$$

8)

$$\int\left(3\sin 6x - \frac{2}{5x-1} + e^{\frac{x}{3}}\right)dx.$$

$$\int\left(3\sin 6x - \frac{2}{5x-1} + e^{\frac{x}{3}}\right)dx = 3\int\sin 6x dx - 2\int\frac{dx}{5x-1} + \int e^{\frac{x}{3}}dx = 3\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) - 2\cdot\frac{1}{5}\ln|5x-1| + 3e^{\frac{x}{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 6x - \frac{2}{5}\ln|5x-1| + 3e^{\frac{x}{3}} + C.$$

Практичне заняття 14

Тема: Обчислення визначеного інтеграла

Мета: Повторити умови інтегрування заміною змінної і частинами.
Формувати вміння та навики обчислення визначеного інтеграла методом інтегрування заміною змінної і частинами. Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

1Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної.
2Обчислення визначеного інтеграла частинами.

Студенти повинні знати:

- формулу Ньютона-Лейбніца;
- метод знаходження визначеного інтеграла заміною змінної;
- метод знаходження визначеного інтеграла інтегруванням частинами.

Студенти повинні уміти:

- знаходити визначений інтеграл заміною змінної;
- знаходити визначений інтеграл інтегруванням частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка, таблиця формул інтегрування, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 279-283.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 365-385.

Теоретичні віломості:

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема. **Якщо: 1) $f(x)$ — неперервна для $x \in [a; b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a,\quad \varphi(\beta) = b;$ 3) $x = \varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ — неперервні для $t \in [\alpha; \beta];$ 4) при $t \in [\alpha; \beta] \Rightarrow x \in [a; b],$ то**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x=t^2, \quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$

$$= 2\int\limits_2^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t-\ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3-\ln 4-(2-\ln 3)) = 2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема . **Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x\in[a;\,b]$, то**

$$\int\limits_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \qquad (2)$$

Приклад.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u=x, \quad du=dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад . $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{ll} 1+\sqrt{2x+1}=t, & dx=(t-1)dt; \\ x=\frac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_2^4 \frac{t-1}{t}\,dt = \int\limits_2^4 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = (t-\ln|t|)\Big|_2^4 = 4-\ln 4-(2-\ln 2) = 2-\ln 2.$$

Приклад $\int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x}; \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e \frac{x^2\cdot dx}{x} =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Обчислити визначені інтеграли

1. $\int\limits_0^1 (1+e^{3x})^2 e^{3x} dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left((1+e^3)^3 - 8\right)$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *Відповідь.* $\mathrm{arctg}\,e - \frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

6. $\int_0^{\pi} e^x \sin xdx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$.

Практичне заняття 11

Тема: Дослідження рядів на збіжність

Мета: Формувати вміння та навики досліджувати рядів на збіжність за допомогою ознак порівнянь, Даламбера та Коші Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.
Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв′язування прикладів на дослідження рядів за допомогою ознак порівняння, Даламбера та Коші.

Студенти повинні знати:

- ознаки збіжності рядів

Студенти повинні уміти:

- досліджувати ряди за допомогою ознак порівняння, Даламбера та Коші.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:

Обчислювальна техніка, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 410-414.

Теоретичні віломості:

Тема: Розв′язування прикладів

<u>Ознака Даламбера</u>.

Якщо для ряду з додатними членами $u_1+u_2+u_3+.....+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то: 1) при $\rho<1$ ряд *збіжний*,

2) при $\rho>1$ ряд *розбіжний*.

<u>Приклад 1</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{5}+\frac{9}{25}+\frac{16}{125}+...+\frac{(n+1)^2}{5^n}+...$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера.

За умовою маємо $u_n=\dfrac{(n+1)^2}{5^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+2)^2}{5^{n+1}}$.

Обчислимо $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+2)^2}{5^{n+1}}:\dfrac{(n+1)^2}{5^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2\cdot 5^n}{5^n\cdot 5\cdot(n+1)^2}=\dfrac{1}{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^2=$

$=\dfrac{1}{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{1}{5}<1$. За ознакою Даламбера даний ряд *збіжний.*

<u>Приклад 2</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+...+\frac{4^n}{n!}+...$$

Розв'язання. Запишемо n–й та $n+1$ –й члени заданого ряду

$$u_n=\frac{4^n}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зауваження. $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ (в математиці «!» – знак факторіалу).
$(n+1)!=1\cdot 2\cdot ...\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1)$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{4^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 4\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 4^n}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{(n+1)}=0<1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

<u>Приклад 3</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$1+\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{8}{\sqrt{10}}+...+\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}+...$$

Розв'язання. Оскільки для заданого ряду

$$u_n=\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+4}},\ \text{то}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n}{2^n}\cdot\sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}}=2>1.$$

Отже, $\rho=2>1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *розбіжний*.

Практичне заняття 12

Тема: Знакозмінні ряди, функціональні ряди

Мета: Вивчити особливості дослідження н збіжність знакозмінних і функціональних рядів

Метод: словесний , практичний

План

1 Знакозмінні ряди

2 Функціональні ряди

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 508-512

1. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Знакопочерговим рядом називається ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (1)$$

де $u_n > 0$ для $n \in N$ (тобто ряд, додатні і від'ємні члени, якого стоять один за одним по черзі).

Достатня ознака збіжності

Теорема.1 (ознака Лейбніца). *Знакопочерговий ряд (.1) збігається, якщо:*

1 *Послідовність абсолютних величин членів ряду монотонно спадає, тобто* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$;

2 *Загальний член ряду прямує до нуля:* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. *При цьому сума* S *ряду (3.1) задовольняє нерівностям*

$$0 < S < u_1 \qquad (2).$$

Зауваження:

1. Дослідження знакопочергового ряду вигляду

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \qquad (3)$$

(з від'ємним першим членом) зводиться шляхом множення всіх його членів на (-1) до дослідження ряду (1).

2. Співвідношення (.2) дозволяє отримати просту і зручну оцінку помилки, яку ми допускаємо, замінюючи суму S даного ряду його частинною сумою S_n. Відкинутий ряд (остача) є також знакопочерговим рядом $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$ сума якого по модулю менша першого члена цього ряду, тобто $S_n < u_{n+1}$. Тому помилка менша модуля першого з відкинутих членів.

Приклад 1. Обчислити приблизно суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}$.

Він збігається. Можна записати: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \ldots = S$. замінивши S на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$$

зробимо помилку, меншу, ніж $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$. Отже, $S \approx 0{,}7834$. ●

2 Знакозмінні ряди.

Знакопочерговий ряд є окремим випадком знакозмінного ряду. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну множину додатніх і нескінченну множину від'ємних членів, називається ***знакозмінними.***

Для знакозмінних рядів має місце наступна загальна достатня ознака збіжності.

Теорема 14.3.2. *Нехай даний знакозмінний ряд* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *(3.4)*

Якщо збігається ряд $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$ *(3.5)* *складений з модулів членів даного ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд(4).*

●

3. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних рядів рядів.

Знакозмінний ряд називається ***тим, що абсолютно збігається,*** якщо ряд, складений з модулів його членів, збігається.

Знакозмінний ряд називається ***тим, що умовно збігається***, якщо сам він збігається, а ряд, складений з модулів його членів, розбіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

○ Це знакопочерговий ряд збігається. Однак ряд, складений з модулів членів даного ряду, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$ розбіжний (гармонійний ряд)..

З Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$. абсолютно збігається, оскільки ряд, складений з модулів його членів, збігається

Ряди, що абсолютно збігаються, додаються, віднімаються, перемножуються як звичайні ряди. Суми таких рядів не залежать від порядку запису членів.

Тому дії над рядами не можна виконувати, не переконавшись в їх абсолютній збіжності.

Для встановлення абсолютної збіжності використовують всі ознаки збіжності знакопозитивних рядів, замінюючи усюди загальний член ряду його модулем.

2 Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції від x, називається ***функціональним:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x_1)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\ldots \qquad (4.1).$$

Надаючи x певне значення x_0, ми одержимо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\ldots,$$

Якщо одержаний числовий ряд сходиться, то точка x_0 називається ***точкою збіжності ряду*** (4.1); якщо ж ряд розходиться – ***точкою розбіжності функціонального ряду***. Сукупність числових значень аргументу x, при яких функціональний ряд сходиться, називається його ***областю збіжності***. В області збіжності функціонального ряду його сума є деякою функцією від x: $S=S(x)$. Визначається вона в області збіжності рівністю

$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ - часткова сума ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

○ Даний ряд є рядом геометричної прогресії зі значенням $q=x$. Отже, цей ряд сходиться при $|x|<1$, тобто при всіх $x\in(-1;1)$; сума ряду рівна $\frac{1}{1-x}$: $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, при $|x|<1$. ●

Степеневий ряд

степеневий ряд ряд, членами якого є степеневі функції аргументу x,***:***

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (4.3)$$

Дійсні (або комплексні) числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ називаються ***коефіцієнтами ряду*** (4.3) $x\in R$ - дійсна змінна.

З'ясуємо питання про збіжність степеневого ряду (4.3). Область збіжності степеневого ряду (4.3) містить принаймні одну точку $x = 0$ (ряд (4.4) сходиться в точці $x = x_0$).

Теорема 14.5.1 (Абеля). *Якщо степеневий ряд (4.3) сходиться при* $x = x_0 \neq 0$*, то він абсолютно сходиться при всіх значеннях x, що задовольняють нерівності*

$y|x| < y|x_0|$.

Наслідок 14.5.1. *Якщо ряд (4.3) розходиться при* $x = x_1$*, то він розходиться і при всіх x, що задовольняють нерівності* $|x| > |x_1|$.

Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду

З теореми Абеля виходить, що якщо $x_0 \neq 0$ є точка збіжності степеневого ряду, то інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь складається з точок збіжності даного ряду; при всіх значеннях x поза цим інтервалу ряд (4.3) розходиться.

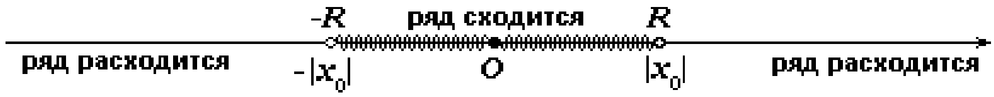

Рис . 2

Інтервал $(-|x_0|;|x_0|)$ називають ***інтервалом збіжності степеневого ряду***. Поклавши, що $|x_0| = R$, інтервал збіжності можна записати у вигляді $(-R;R)$. Число R називають ***радіусом збіжності степеневого ряду***, тобто

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ Аналогічно, ознакою Коші $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Зауваження:

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можна переконатися, що ряд (4.3) абсолютно сходиться на всій числовій осі. В цьому випадку $R = \infty$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то R=0 . Інтервал збіжності степеневого ряду (4.4), що шукається з нерівності $|x - x_0| < R$; має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Якщо степеневий ряд містить не всі степені x, тобто заданий неповний степеневий ряд, то інтервал збіжності ряду знаходять без визначення радіусу збіжності (формули (5.1) і (5.2)), а безпосередньо застосовуючи ознаку Даламбера (або Коші) для ряду, складеного з модулів членів даного ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

○ Скористаємося формулою (5.1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$ Отже, даний ряд абсолютно сходиться на всій числовій осі. ●

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$

○ Заданий ряд неповний. Скориставшись ознакою Даламбера для даного ряду, маємо: $|u_n|=\frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}$, $|u_{n+1}|=\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|}=|x^2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$.

Ряд абсолютно сходиться, якщо $x_2 < 1$ або $-1 < x < 1$. Дослідемо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності. При x = -1 маємо ряд $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$, який сходиться за ознакою Лейбніца. При x = 1 маємо ряд $+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ - цей ряд теж сходиться за ознакою Лейбніца. Отже, областю збіжності початкового ряду є відрізок [-1;1]. ●

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

○ Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою (5.1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2.$$

Отже, ряд сходиться при $-2 < x + 2 < 2$, тобто при $-4 < x < 0$. При x = - 4 маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, який сходиться за ознакою Лейбніца. При x = 0 маємо ряд, що розходиться $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Отже, областю збіжності початкового ряду є піввідрізок [- 4;0)

Лекція 26

Тема: Математична статистика. Вибірки, Вибіркові розподіли.

Мета: зясувати предмет і методи математичної статистики, вивчити поняття вибірки і вибіркового розподілу

Метод: словесний , практичний

План

1 Основні поняття

2 Вибірка

3 Дискретний статистичний розподіл вибірки
та її числові характеристики

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби,ТЗН: обчислювальна техніка

Література

1 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.-С. 24-25.

1 Основні поняття

Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту, називають *математичною статистикою*.

Основним змістом математичної статистики є систематизація, обробка і використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Генеральну сукупність -множина Ω однотипних елементів, яким притаманні певні кількісні ознаки (розміри, вага, маса тощо),.

Обсяг генер. сукупн. -кількість усіх елементів генеральної сукупності , позначають символом N, значення якого здебільшого невідоме.

2 Вибірка

Вибірка кожна непорожня підмножина A множини Ω $(A \subset \Omega)$ випадково вибраних елементів із генеральної сукупності називається.

Кількість усіх елементів вибірки називають її обсягом і позначають символом n. Його значення відоме, причому воно набагато менше за обсяг генеральної сукупності ($n << N$).

Математична статистика розв'язує дві категорії задач:

1) статистичне оцінювання (точкове, інтервальне) параметрів генеральної сукупності;

2) перевірка правдивості статистичних гіпотез про значення параметрів генеральної сукупності або про закон розподілу ознаки генеральної сукупності на підставі обробки результатів вибірки.

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають *варіантою*.

Зростаючий числовий ряд варіант називають *варіаційним*.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають *частотою варіанти* x_i.

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i , \qquad (350)$$

де k — кількість варіант, що різняться числовим значенням;

n — обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її *відносною частотою* і позначають через W_i , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n} . \qquad (351)$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1 . \qquad (352)$$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X, яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд — це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди, у котрих інтервали є рівними між собою.

3 Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі він має такий вигляд:

$= x_i$	1	2	3		k
i	1	2	3		k
i	1	2	3		k

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпірична функція $F^*(x)$ та її властивості. Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}, \tag{353}$$

називається *емпіричною*, або *комулятою*.

Тут n — обсяг вибірки;

n_x — кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x;

$F^*(x)$ — називають ще *функцією нагромадження відносних частот*.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3) $F(x)\big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, а саме: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$, або $(x_i; W_i)$.

У першому випадку ламану лінію називають *полігоном частот*, у другому — *полігоном відносних частот*.

***Числові характеристики*:**

1) *вибіркова середня величина* $\bar{x}_{\text{В}}$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n}, \tag{354}$$

називають *вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки*.

Тут x_i — варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i — частота цієї варіанти;

n — обсяг вибірки ($n = \sum n_i$).

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i}{n}; \tag{355}$$

2) *відхилення варіант*. Різницю $(x_i - \bar{x}_{\text{В}})n_i$ називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum (x_i - \bar{x}_{\text{В}}) n_i = \sum x_i n_i - \sum \bar{x}_{\text{В}} n_i = n \cdot \bar{x}_{\text{В}} - n \cdot \bar{x}_{\text{В}} = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) *мода* (Mo*). *Модою дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди — *двомодальним* і т. д.;

4) *медіана* (Me*). *Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) *дисперсія.* Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_В$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки — це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_В$, яке обчислюється за формулою

$$D_В = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_В)^2 n_i}{n} \qquad (356)$$

або

$$D_В = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_В)^2; \qquad (357)$$

6) *середнє квадратичне відхилення вибірки* $\sigma_В$. При обчисленні $D_В$ відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X, тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_В = \sqrt{D_В}, \qquad (358)$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_В$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X;

7) *розмах* (R). Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_В$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою x_{max} і найменшою x_{min} варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається *розмахом*

$$R = x_{max} - x_{min}; \qquad (359)$$

8) *коефіцієнт варіації V.* Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_В$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_В}{\bar{x}_В} 100\%. \qquad (360)$$

Приклад. За заданим статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

потрібно:

1) обчислити $\bar{x}_В$, $D_В$, $\sigma_В$;

2) знайти Mo*, Me*;

3) обчислити R, V.

Розв'язання. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, то згідно з формулами (354), (357), (358) дістанемо:

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2{,}5 \cdot 10 + 4{,}5 \cdot 20 + 6{,}5 \cdot 30 + 8{,}5 \cdot 30 + 10{,}5 \cdot 10}{100} = 6{,}7;$$

$$\bar{x}_В = 6{,}7.$$

Для обчислення $D_В$ визначається

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(2{,}5)^2 \cdot 10 + (4{,}5)^2 \cdot 20 + (6{,}5)^2 \cdot 30 + (8{,}5)^2 \cdot 30 + (10{,}5)^2 \cdot 10}{100} = 50{,}05.$$

Тоді

$$D_В = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_В)^2 = 50{,}05 - (6{,}7)^2 = 50{,}05 - 44{,}89 = 5{,}16.$$

$$D_В = 5{,}16.$$

$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}27.$

σ_B = 2,27.

Mo^* = 6,5; 8,5.

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде двомодальним. Me^* = 6,5, оскільки варіанта x = 6,5 поділяє варіаційний ряд 2,5; 4,5; **6,5**; 8,5; 10,5 на дві частини: 2,5; 4,5 і 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10{,}5 - 2{,}5 = 8.$$

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} 100\,\% = \frac{2{,}27}{6{,}7} 100\,\% = 33{,}88\,\%.$$