Міністерство освіти і науки України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
__________С.В.Бондаренко
_____ ___________2013 р.

Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів з дисципліни ВИЩА МАТЕМАТИКА для студентів 2 курсу спеціальності:

5.05070104 «Монтаж і експлуатація електроустаткування підприємств і цивільних споруд»

Уклав Кур′ян О.В.

Розглянуто на засіданні
циклової комісії
природничо-наукової підготовки
Протокол №__ від ___ _________ 2013 року
Голова циклової комісії /А.М.Савчук/

Самостійна робота № 1

Тема: Форми комплексних чисел
Мета: формувати вміння та навички дій над комплексними числами

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Алгебраїчна форма комплексного числа.
2 Тригонометрична форма комплексного числа.
3 Показникова форма комплексного числа.

Практичні завдання:

1 Записати комплексні числа в арифметичній формі, якщо:

а) a=2, b=3;
б) a=-1, b=0;
в) a=-5, b=-4;
г) a=0, b=$\sqrt{3}$.

2 Записати комплексні числа в тригонометричній формі:

а) z=3-3i;
б) z=-$\sqrt{3}$-i;
в) z=5.

3 Записати комплексні числа в показниковій формі:

а) $\sqrt{3}$-i;
б) -1-i;
в) -3.

4 Записати комплексні числа в арифметичній формі:

а) $z = 2e^{\frac{\pi i}{4}}$;
б) $z = e^{i}$;
в) $z = e^{2+i}$.

Література: Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с 86-88, 101, 112.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001, с 342-347.

Питання для самоконтролю:

1 Що називається комплексним числом? Як записуються комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формі?

2 Що називається модулем і аргументом комплексного числа? Як вони знаходяться і який їхній геометричний зміст?

3 Як визначаються дії над комплексними числами в алгебраїчний та тригонометричній формах?

4 Записати формули Муавра та Ейлера.

Теоретичні відомості

Тема: Форми комплексних чисел

Число $a+bi$, де a і b – будь-які дійсні числа, i – уявна одиниця, називається **комплексним числом** (a – дійсна частина, bi – уявна частина комплексного числа, а b – коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює -1 , позначають буквою i і називають **уявною одиницею** (i – перша буква латинського слова imaginarius – уявний).

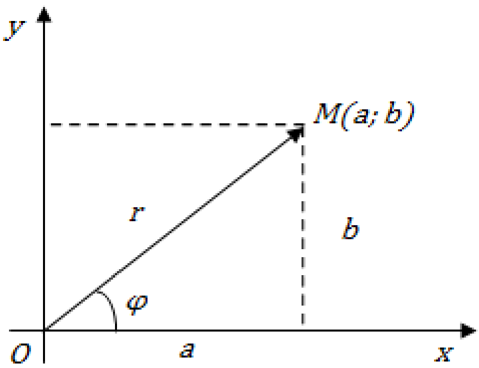
Тобто, для символу i виконується рівність

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Запис $a+bi$ називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

Геометричне зображення комплексного числа.

Комплексне число $z=a+bi$ геометрично зображують точкою $M(a;b)$ координатної площини.



Зручно комплексне число зобразити у вигляді вектора

$$\overrightarrow{OM}(a;b).$$

Довжина вектора, який зображає комплексне число, називається **модулем цього комплексного числа**. Модуль комплексного числа позначається r. Тобто

$$r = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Кут φ між додатним напрямком осі абсцис і вектором $\overrightarrow{OM}$ називається **аргументом комплексного числа**.

Примітка! Кожне комплексне число, що не дорівнює нулю, має нескінчену множину аргументів, які відрізняються один від одного на $360°k$, де $k \in Z$.

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

Тригонометрична форма комплексного числа.

Виразивши a і b через модуль r і аргумент φ, комплексне число $a+bi$ запишемо у вигляді

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Права частина цієї тотожності називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Приклад. Подати sin3φ та cos3φ через sinφ та cosφ.

$$\bullet\ \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi i -$$

$$-3\cos\varphi\sin^2\varphi - \sin^3\varphi i = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)$$

Прирівнюючи відповідні абсциси та ординати, дістаємо:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\ \cos\ \varphi;$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Формула Ейлера: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.}$

Згідно з цією формулою комплексне число можна подати в ***показниковій формі***:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}.} \qquad (5)$$

♦ Справді, нехай *r* — модуль комплексного числа *z* = *a* + *ib*, а φ — головний аргумент. Тоді

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

Беручи до уваги формулу Ейлера, дістаємо:

$$z = re^{i\varphi}.\ ♦$$

Властивості:

1) $e^{(2k\pi+\varphi)i} = e^{\varphi i}$;

$\bullet\, e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1 \Rightarrow$

$e^{(2k\pi+\varphi i)} = e^{2k\pi i}e^{\varphi i} = e^{\varphi i}.\bullet$

2) $e^{2\pi i} = 1.$

Приклад. Обчислити дійсне значення i^i.

$$\bullet\ i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.\ \bullet$$

Самостійна робота № 2

Тема: Застосування комплексних чисел при обчислюванні фізичних величин
Мета: формувати вміння та навики застосування комплексних чисел при обчислюванні фізичних величин

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Напруга і струм.
2 Опір і провідність
3 Потужність

Практичні завдання:
1 За рівняннями написати відповідні комплексні числа в тригонометричній, показниковій і алгебраїчній формі (ω=314 рад/с або =18000 град/с)

а) $u = 2\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$; в) $i = 4\sin(\omega t + 20^0)$
б) $u = 127\sin(\omega t + 120^0)$; г) $e = 0.8\sin(\omega t - 3)$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990. с 114-117.

Питання для самоконтролю:
1 Які величини у фізиці виражаються через комплексні числа?
2 В яких розділах фізики застосовуються комплексні числа?
3 Записати силу струму, напругу, гармонічні коливання через комплексні числа.

Теоретичні відомості

Тема: Застосування комплексних чисел при обчислюванні фізичних величин

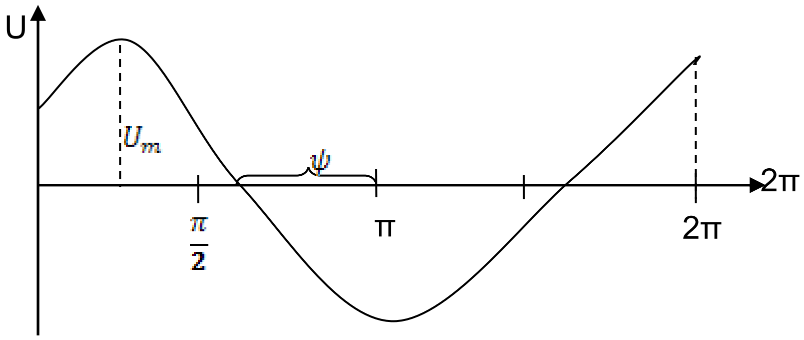
В електротехніці значне місце займає тема «Змінний струм». Це пояснюється тим, що більшість електротехнічних установок працюють на змінному струмі. Електричні станції всього світу виробляють змінну напругу, що створює в звичайних електричних колах змінний струм. Але електричні станції створюють напругу і струм, що змінюється синусоїдально.

Рівняння змінної напруги в загальному виді виглядає так:

$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$,

де u - миттєве значення напруги; U_m - максимальне значення (амплітуда) напруги; ω - кутова частота (при стандартній частоті 50Гц $\omega = \frac{314\text{рад}}{\text{с}}$ або 18000град/с) ; t – час; ψ - початковий фазовий кут; $\omega t = \alpha$ - електричний кут.

Це рівняння зв'язує дві змінні величини; напругу u і час t . З пливом часу напруга змінюється синусоїдально.



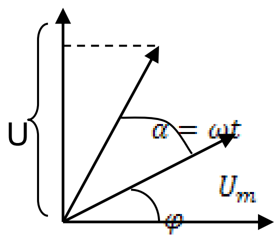
Аналогічний вигляд мають рівняння (і графіки) інших синусоїдальних величин, які змінюються:

струму : $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

е.р.с. : $e = E_m \sin(\omega t + \varphi)$ і т.д.

При розрахунках ланцюгів змінного струму потрібно виконувати дії над даними рівняннями, а це справа трудомістка, особливо, якщо потрібно додати декілька рівнянь.

На допомогу приходить та обставина, що змінна <u>синусоїдальна величина може бути однозначно представлена вектором</u>, що обертається з кутовою швидкістю ω , довжиною рівною амплітуді і початковим положенням, що визначається кутом φ .



Так як вектори замінюють синусоїдальні величини, то додавання або віднімання цих величин можна замінити додаванням або відніманням векторів.

Операції виконуються з рівняннями, що мають однакову кутову частоту, тому всі вектори, що замінюють рівняння , повинні обертатися з однією і тією ж кутовою швидкістю і, отже, їх взаємне розміщення не змінюється. Завдяки цьому відпадає необхідність обертання векторів. Їх зображують при $t = 0$.

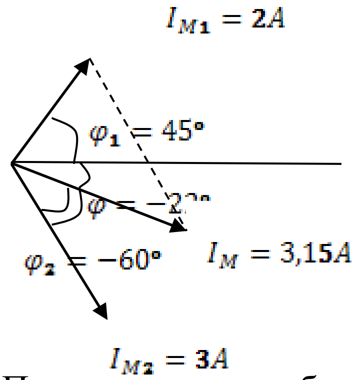
Приклад 1. Дано рівняння синусоїдальних струмів $i_1 = 2\sin(\omega t + 45°)$, $i_2 = 3\sin(\omega t - 60°)$. Знайти рівняння сумарного струму $i = i_1 + i_2$.

Розв'язання.

З даних рівнянь знаходимо

$I_{M_1} = 2A, \varphi_1 = 45°$; $I_{M_2} = 3A, \varphi_2 = -60°$;

Будуємо ці вектори на площині і виконуємо додавання:



По результатам побудови можна написати рівняння сумарного струму

$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = 3{,}15 \sin(\omega t - 22°)$

Таким чином, можна зробити наступні висновки:

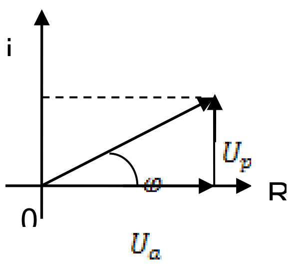
1. Змінна синусоїдальна величина може бути представлена вектором. Довжина вектора дорівнює амплітуді; кут нахилу дорівнює початковому фазовому куту.
2. Додавання (віднімання) синусоїдальних величин можна замінити додаванням (відніманням) векторів.

Однак, крім додавання і віднімання синусоїдальні величини потрібно ще й множити і ділити. І тут на допомогу приходять комплексні числа.

Розглянемо, як виражаються різні величини комплексними числами.

<u>Напруга і струм.</u>

Нехай маємо рівняння $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ і вектор $\overrightarrow{OM}$, що відповідає цьому рівнянню. В електротехніці за довжину вектора береться діюче значення U , що обчислюється діленням $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$.



На малюнку показано дві проекції цього вектора і на вісь дійсних чисел - U_a (активна складова напруги) і на вісь уявних чисел U_p (реактивна складова напруги).
Синусоїдальна величина, виражена комплексним числом, називається комплексом і позначається прописною буквою з крапкою зверху - $\dot{U}$.
У відповідності з рисунком можна записати комплекс у трьох формах:

- алгебраїчній – $\dot{U} = U_a + jU_p$;
- тригонометричній – $\dot{U} = U(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;
- показниковій – $\dot{U} = Ue^{i\varphi}$.

Таким чином, модуль комплексного числа дорівнює дійсній напрузі, а аргумент – початковому фазовому куту.

Аналогічно <u>для струму</u>:

$i = I_m\sin(\omega t + \varphi)$; $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$;
$\dot{I} = I_a + jI_p$; $\dot{I} = I(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $\dot{I} = Ie^{i\varphi}$.

Приклад 2.

Дано $i = 2\sin(314t - 60°)$. Виразити струм комплексним числом.
Розв'язання.

$I_m = 2A$; $\varphi = -60°$; $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} =$.
Тоді комплекс струму в показникові формі $\dot{I} = 1{,}41e^{-j60}$ і в тригонометричній та

алгебраїчній: $\dot{I} = 1{,}41(\cos(-60°) + j\sin(-60°)) = 1{,}41$ ($\sqrt{3/2})$ $\approx 0{,}705 - 1{,}24j$.
Звідси $I_a = 0{,}705A$ і $I_p = -1{,}24A$.

Приклад 3.

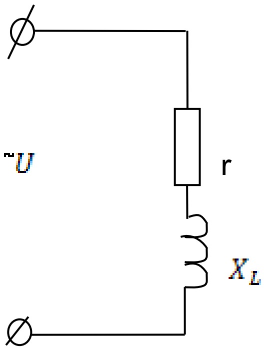
Дано струм в комплексній формі: $I = 3 - 4j$. Записати рівняння струму.
Розв'язання.
Знайдемо амплітуду і початковий фазовий кут, а для цього модуль і аргумент числа:
$I = \sqrt{9 + 16} = 5A$; тоді $I_m = I \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07A$.

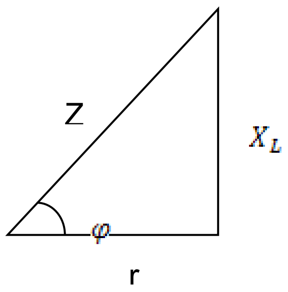
$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{4}{3}$, звідки $\varphi = -\mathrm{arctg}$ $= -53°$ і маємо $i = I_m\sin(\omega t + \varphi)$ або $i = 7{,}07\sin(\omega t - 53°)$

Для стандартної кутової частоти можна замість ω написати $314\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Опір і провідність

Маємо ланцюг





Де r – активний опір (наприклад лампа розжарювання);
X_L – індуктивний опір (наприклад котушка);
z – загальний опір ланцюга (повний опір).

Всі опори утворюють прямокутний трикутник опору, де кут φ називають кутом здвигу фаз. Хоча опори не являються синусоїдальними величинами, однак відрізок r відкладається по осі дійсних чисел, а відрізок X_L – по осі уявних чисел.

Опір в комплексній формі позначається буквою Z. Для ланцюга, зображеного на малюнку комплекс опору записується наступним чином:

$Z = r + jX_L$ – алгебраїчна форма,

$Z = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрична форма,

$Z = ze^{j\varphi}$ – показникова форма.

Модуль $z = \sqrt{r^2 + X_L^2}$, аргумент $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L}{r}$.

Отже, в комплексі опору модуль дорівнює повному опору, а аргумент – здвигу фаз.

Провідність – це величина обернена до опору.

Комплекс провідності позначається $Y =$.

Потужність

Комплекс потужності отримаємо, якщо комплекс напруги помножити на спряжений комплекс струму $\tilde{S} = \dot{U}\bar{I}$.

Після множення отримаємо комплексне число, у якого дійсна частина рівна активній потужності, а уявна – реактивній потужності.

Приклад 4.

Дано: $U = 43{,}5 + j \cdot 55{,}6$; $\dot{I} = 10{,}4 + j \cdot 9{,}35$.

Знайти активну і реактивну потужності.

Розв'язання.

Переведемо комплекси в показникову форму:

$|U| = 70{,}7B$, $\varphi_1 = \mathbf{ar}\mathrm{ctg}\ \dfrac{55{,}6}{43{,}5} = 52^\circ$.

$|I| = 14A$, $\varphi_2 = \mathbf{ar}\mathrm{ctg}\ \dfrac{9{,}35}{10{,}4} = 42^\circ$.

тоді $\dot{U} = 70{,}7e^{j \cdot 52}$; $\dot{I} = 14e^{j \cdot 42}$.

Спряжений комплекс струму $\bar{I} = 14e^{-j \cdot 42}$

$\tilde{S} = \dot{U}\bar{I} = 70{,}7e^{j \cdot 52} \cdot 14e^{-j \cdot 42} = 990(\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ) = 975 + j \cdot 171.$

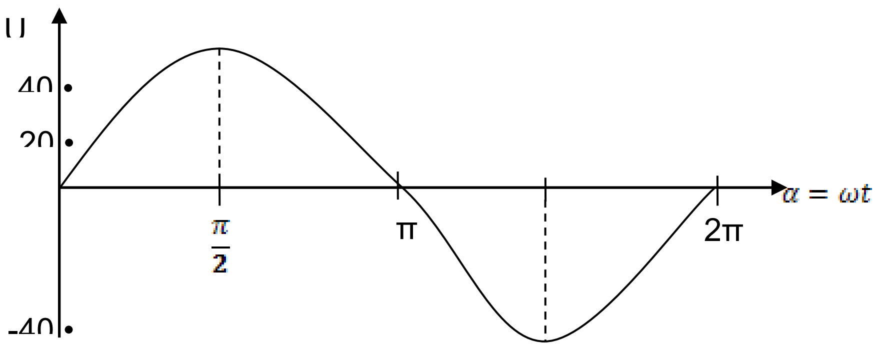
Звідси активна і реактивна потужності:

$P = 975\text{Вт}$, $Q = 171\text{Вт}$.

Приклад 5.

Дано синусоїди на рис. а,б,в.

Потрібно: 1) написати рівняння, що відповідає синусоїді; 2) побудувати вектор, що відповідає синусоїді.



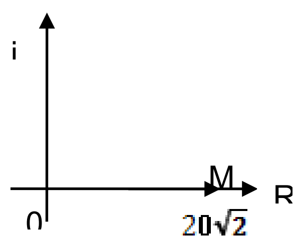
а)

Розв'язання.

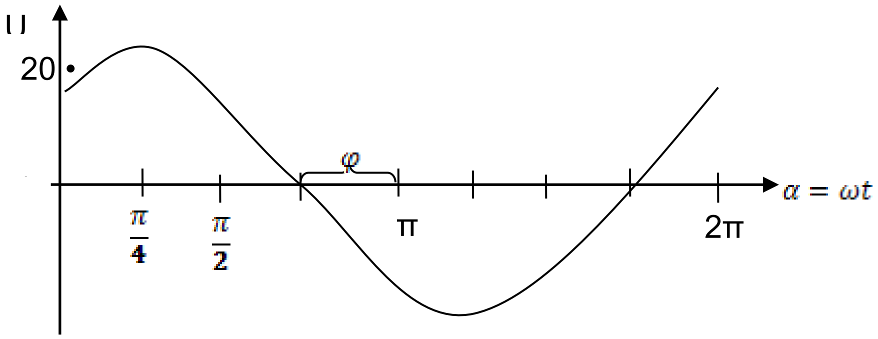
$U = 40 \sin \omega t$;

$|U| = \dfrac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$; $\varphi = 0$, тоді $\dot{U} = 20\sqrt{2}e^{j0}$ показникова форма комплексного числа, $\dot{U} = 20\sqrt{2}(\cos 0 + j \sin 0)$ – тригонометрична форма і $\dot{U} = 20\sqrt{2} + j \cdot 0 = 20\sqrt{2}$ – алгебраїчна форма.

Тоді вектор, що зображує синусоїду буде $\overline{OM}\left(20\sqrt{2}; 0\right)$



б)

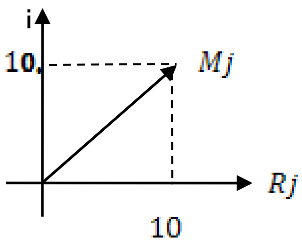


Розв'язання.

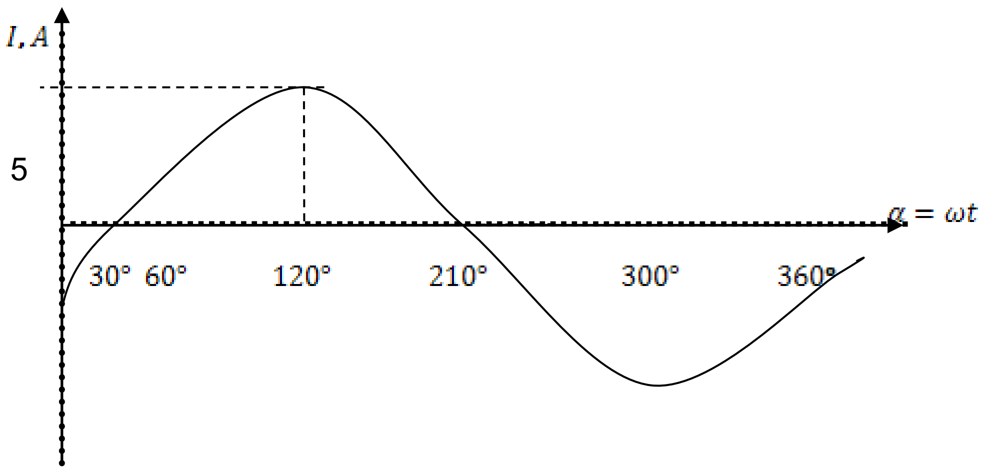
$U = 20\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

$|U| = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$, тоді $\dot{U} = 10e^{j\frac{\pi}{4}}$ або $\dot{U} = 10\sqrt{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ або $\dot{U} = 10 + j10$.

Тоді вектори, що зображує синусоїду, буде $\overline{OM}(10;10)$.



в)

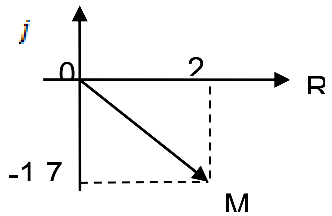


Розв'язання.

$i = 5\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right);$

$|i| =$ $= 2{,}5\sqrt{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, тоді $\dot{I} = 2{,}5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}$ або $\dot{I} = 2{,}5\sqrt{2\left(\cos\frac{\pi}{6} - j\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ або $\dot{I} = 2{,}5 - j1{,}75$.

Отже, вектор, що зображує синусоїду буде $\overline{OM}(2{,}5;-1{,}75)$.



j
0
2
R
-1 7
M

Самостійна робота № 3

Тема: Методи обчислення визначників
Мета: формувати вміння та навики обчислення визначників II та III порядків

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Визначники n-го порядку.
2 Методи обчислення визначників.

Практичні завдання:
Обчислити визначники трьома способами: за правилом трикутника, розкладом за елементами 2-го рядка, розкладом по елементам будь-якого рядка чи стовпця з попереднім перетворенням, щоб всі елементи цього рядка чи стовпця, крім одного, стали нулями:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001,с 6-12.

Питання для самоконтролю:
1 Пояснити обчислення визначників другого порядку.
2 Пояснити обчислення визначників третього порядку.
3 Що називається визначником 4-го порядку? Методи обчислення визначників 4-го порядку?
4 Методи обчислення визначників 5-го і вищих порядків.

Теоретичні відомості

Користуючись означенням, можна обчислювати визначники малого порядку або визначники спеціального вигляду. Для обчислення визначників n–го порядку існують спеціальні методи. У кожному методі суттєво використовується структура самого визначника.

1. Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що стоять вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий визначник дорівнює добутку елементів його головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Метод зведення визначника до трикутного вигляду полягає в тому, що, користуючись властивостями визначників, даний визначник перетворюється так, щоб одержати визначник трикутного вигляду відносно головної і далі одержується результат.

Нехай задано визначник n–го порядку загального вигляду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Будемо зводити цей визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Якщо всі елементи першого стовпчика дорівнюють нулю, то $\Delta = 0$. В супротивному випадку будемо вважати, що $a_{11} \neq 0$ (інакше знаходимо в першому стовпчику ненульовий елемент і рядок, в якому він знаходиться, додамо до першого рядка). Будемо перетворювати визначник Δ так, щоб одержати визначник, в якому всі елементи першого стовпчика, крім першого, дорівнюють 0. Для цього віднімемо від другого рядка перший, помножений на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Далі від третього рядка віднімемо перший, помножений на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Продовжуючи цей процес, нарешті від n-го рядка віднімемо перший, помножений на число $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ Згідно з властивостями визначників, ці перетворення не змінюють величини визначника Δ. Одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Якщо в цьому визначнику всі елементи $b_{22}, b_{32},\dots,b_{n2}$ дорівнюють 0, то $\Delta = 0$. Дійсно, якщо розкласти в такому випадку визначник Δ за елементами першого стовпчика, одержуємо $\Delta= a_{11}\cdot A_{11}$, де A_{11} – алгебраїчне доповнення елемента a_{11}; $A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11}$ де M_{11} – доповнюючий мінор елемента a_{11}; M_{11} – визначник порядку n-1, перший стовпчик якого нульовий, тому $M_{11} = 0$, звідки $A_{11} = 0$ і $\Delta = 0$. Тому далі будемо вважати, що серед елементів $b_{22}, b_{32},\dots,b_{n2}$ є ненульові, а тоді можна вважати $b_{22} \neq 0$ (в супротивному випадку можна до другого рядка додати деякий рядок, що стоїть після нього і другий елемент якого не дорівнює нулю). Далі перетворюємо визначник так, щоб одержати визначник, в якому всі елементи другого стовпчика, починаючи з третього, дорівнюють нулю. Для цього спочатку від третього рядка віднімаємо другий, помножений на число $\frac{b_{32}}{b_{22}}$. Далі, аналогічно, від четвертого рядка віднімемо другий, помножений на число $\frac{b_{42}}{b_{22}}$. Продовжуючи цей процес, нарешті від n-го рядка віднімаємо другий, помножений на $\frac{b_{n2}}{b_{22}}$. Всі ці перетворення не змінюють величини визначника. В результаті одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес одержання нулів нижче головної діагоналі, через скінчене число кроків або переконаємось в тому, що $\Delta = 0$, або зведемо визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. В цьому випадку

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

причому $x_{11}= a_{11}\neq 0$, $x_{22}= b_{22}\neq 0$, $x_{33}= c_{33} \neq 0,\dots, x_{nn} \neq 0$. Отже,

$$\Delta = x_{11}x_{22}x_{33}\dots x_{nn}$$

Методом зведення до трикутного вигляду можна обчислювати визначники малих порядків.

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Нарешті від п'ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другом місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п'ятого рядка додамо другий, помножений на 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п'ятого віднімемо третій, помножений на 4

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п'ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $\Delta = 1\cdot(-1)\cdot1\cdot(-3)\cdot\frac{52}{3} = 52$

На практиці рекомендується при обчисленні визначників з цілими елементами на кожному кроці одержувати визначники також з цілими елементами. У нашому випадку перед виконанням останнього кроку перетворень можна було, наприклад, перейти від визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

до визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{vmatrix}$$

відніманням від п'ятого рядка четвертого, помноженого на 2. Далі переставимо четвертий і п'ятий рядки. Як відомо, при цьому змінюється знак визначника:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \end{vmatrix}.$$

Нарешті до п'ятого рядка додамо четвертий, помножений на 3:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, $\Delta = -(1\cdot(-1)\cdot1\cdot1\cdot 52) = 52$.

2. Обчислення визначника розкладом за рядком (стовпчиком)

Приклад 2. Обчисли визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Зручніш за все робити розклад за рядком (стовпчиком), в яких зустрічається найбільше число нульових елементів. В даному випадку – це четвертий стовпчик. І так за теоремою 1 маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_1 + 3\cdot\Delta_2$$

Отримані в результаті два визначника третього порядку обчислюємо тим самим методом. У визначнику Δ_1 нульових елементів немає, тому можна вибрати для розкладу будь-який із стовпчиків, наприклад, перший. В Δ_2 єдиний нульовой елемент знаходиться на перетині першого стовпчика і другого рядка. Будемо розкладати Δ_2 за другим рядком:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-6-2)-3\cdot(-6-1)+3\cdot(-2+1)=$$

$$=-16+21-3=2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(4-3)-2\cdot(-2+3)=1-2=-1$$

Таким чином отримаємо

$$\Delta=\Delta_1+3\Delta_2=2+3\cdot(-1)=-1$$

3. Обчислення визначника шляхом перетворення в нуль всіх, окрім одного, елементів рядка (стовпчика)

Приклад 3. Обчислити визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

<u>Розв'язання</u>. Будемо зануляти всі, окрім першого, елементи першого рядка. Для цього віднімемо від другого, третього і четвертого стовпчика перший стовпчик, помножений відповідно на 2, 3 і 4. Отримаємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2-2 & 3-3 & 4-4\\ 2 & 3-4 & 4-6 & 1-8\\ 3 & 4-6 & 1-9 & 2-12\\ 4 & 1-8 & 2-12 & 3-16\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -2 & -7\\ 3 & -2 & -8 & -10\\ 4 & -7 & -10 & -13\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 7\\ 3 & 2 & 8 & 10\\ 4 & 7 & 10 & 13\end{vmatrix}.$$

Отриманий в такому вигляді визначник розкладемо за першим рядком:

$$\Delta=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 7\\ 3 & 2 & 8 & 10\\ 4 & 7 & 10 & 13\end{vmatrix}=(-1)\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & 8 & 10\\ 7 & 10 & 13\end{vmatrix}.$$

Визначник третього порядку, який отримали, будемо обчислювати тим самим способом. Віднімемо від другого і третього стовпчика перший стовпчик, помножений відповідно на 2 і 7. Отримаємо (попутно винесемо спільні множники із стовпчиків)

$$\Delta = (-1)\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 7 & -4 & -36 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 4\cdot(-4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 16\cdot(9+1) = 160.$$

Самостійна робота № 4

Тема: Знаходження оберненої матриці
Мета: формувати вміння та навики знаходження оберненої матриці

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Поняття оберненої матриці.
2 Знаходження оберненої матриці.

Практичні завдання:
Знайти обернену матрицю:

$$1\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Література:

Курс математики для техникумов. /Под редакцией Матвеева Н.М. ч.1,2-М.:Наука, 1977, с 181-184.

Питання для самоконтролю:
1. Пояснити поняття оберненої матриці.
2. Умова існування оберненої матриці.
3. Назвати порядок знаходження оберненої матриці.

Теоретичні відомості

Означення. *Матриця* A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** A, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Нехай дано квадратну матрицю A. Доведемо, що коли $\Delta(A)\neq 0$, існує обернена матриця A^{-1}. Розглянемо матрицю:

$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$. Утворимо добутки AB і BA.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці C знаходимо за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}. \qquad (1.6)$$

Якщо $i = j$, то згідно з формулою (1.3) маємо: $c_{ii}=\Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці A; якщо $i\neq j$, то вираз (1.6) є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j-му рядку цього самого визначника. За властивістю 9 визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже, $c_{ij}=0$, якщо $i \neq j$. Матриця C набирає вигляду: $C=\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}$. Щоб ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\dfrac{1}{\Delta(A)}$.

$$E=\frac{1}{\Delta(A)}C=A\frac{1}{\Delta(A)}B=AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для матриці A матриця A^{-1} єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C, така що $AC = CA = E$. Тоді

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$

а водночас

$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}, \text{ звідси } C = A^{-1}.$$

Доходимо висновку, що початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

Повернемось тепер до виразу (1.5) — запису системи рівнянь у матричному вигляді $AX = B$. Припустимо, що система складається з n лінійних рівнянь з n невідомими, матриця A — квадратна і $\Delta(A)\neq 0$ — матриця невироджена. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1} — вона за тих припущень, які щойно зроблено, існує. Помноживши тепер матричну рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B\Rightarrow\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B\Rightarrow EX=A^{-1}B,$$

або остаточно $X = A^{-1}B$.

Останній вираз — це розв'язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв'язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1}.

Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

● Обчислимо:

$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5$. $\Delta(A) \neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Самостійна робота № 5

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса і матричним методом
Мета: формувати вміння та навики розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса і матричним методом

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса
2 Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Практичні завдання:
Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса і матричним методом:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.: 2001, с 21-25.

Питання для самоконтролю:
1 Назвати алгоритм розв'язку системи лінійних рівнянь метод Гаусса і матричним методом
2 Розв'язати систему лінійним рівнянь методом Гаусса і матричним методом

Теоретичні відомості

Метод Гаусса розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в **послідовному виключенні змінних** і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n = a_{n0} \end{cases} \qquad (1)$$

до трикутного вигляду

$$\begin{aligned} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n &= b_{10}; \\ b_{22}x_2+\ldots+b_{2n}x_n &= b_{20}; \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{nn}x_n = b_{n0},\ b_{kk}&=1 \quad (k=1,2,\ldots,n). \end{aligned} \qquad (2)$$

Припустимо, що в системі (1) коефіцієнт $a_{11}\neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то на перше місце переносимо таке рівняння, щоб виконувалась умова $a_{11}\neq 0$.

За допомогою першого рівняння виключимо x_1 із решти рівнянь. Обчислення виконаємо в таблиці:

$$\begin{array}{r|cccc|c} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ \hline & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{10} \\ A_0: & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{20} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{n0} \end{array}$$

Іноді вводять контрольний стовпець $K=\sum_{s=0}^{n} a_{ks}$, що дає змогу виявляти помилки.

Поділивши перший рядок на a_{11}, позначимо

$$a_{1k}^{(1)}=\frac{a_{1k}}{a_{11}} \quad (k=0,1,2,\ldots,n).$$

Далі перший рядок множимо послідовно на a_{21} і віднімаємо від другого рядка, множимо на a_{31} і віднімаємо від третього рядка і т. д.

Позначивши

$$a_{ik}^{(1)}=a_{ik}-a_{k1}a_{1k} \quad (i=2,\ldots,n;\ k=0,1,2,\ldots,n),$$

дістанемо таблицю коефіцієнтів:

$$\begin{array}{r|cccc|c} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ \hline & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & a_{10}^{(1)} \\ A_1: & 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & a_{20}^{(1)} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & a_{n0}^{(1)} \end{array}$$

Для невідомих $x_2,\ldots,x_n$ маємо систему $n-1$ рівнянь. Міркуючи, як і раніше, виключимо x_2 з усіх рівнянь, починаючи з третього. Для цього спочатку поділимо другий рядок на $a_{22}^{(1)}$. Якщо коефіцієнт $a_{22}^{(1)}=0$, то переставимо рівняння так, щоб виконувалася умова $a_{22}^{(1)}\neq 0$.

Позначивши

$$a_{2k}^{(2)}=\frac{a_{2k}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (k=2,\ldots,n;\ 0),$$

помножимо другий рядок послідовно на $a_{32}^{(1)}$ і віднімемо від третього рядка; на $a_{42}^{(1)}$ і віднімемо від четвертого рядка і т.д. Дістанемо таблицю коефіцієнтів:

$$
A_2:\quad
\begin{array}{cccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \\
\hline
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{10}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & a_{20}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & a_{30}^{(3)} \\
0 & 0 & a_{43}^{(3)} & \dots & a_{4n}^{(3)} & a_{40}^{(3)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & a_{n0}^{(3)}
\end{array}
$$

Продовжуючи процес виключення невідомих, дістаємо нарешті таблицю:

$$
A_n:\quad
\begin{array}{ccccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n & 1 \\
\hline
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(1)} & a_{10}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & a_{20}^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & a_{30}^{(3)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & a_{n-1,0}^{(n-1)} \\
0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n0}^{(n)}
\end{array}
$$

Таблиця коефіцієнтів при невідомих набирає трикутного вигляду. На головній діагоналі всі елементи $a_{kk}^{(k)}=1$. Запишемо відповідну систему рівнянь:

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\ldots+a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+a_{1,n}^{(1)}x_n&=a_{10}^{(1)},\\
a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\ldots+a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+a_{2,n}^{(2)}x_n&=a_{20}^{(2)},\\
a_{33}^{(3)}x_3+\ldots+a_{3,n-1}^{(3)}x_{n-1}+a_{3,n}^{(3)}x_n&=a_{30}^{(3)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n&=a_{n-1,0}^{(n-1)},\\
a_{n,n}^{(n)}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n&=a_{n-1,0}^{(n-1)},\\
a_{n,n}^{(n)}x_n&=a_{n,0}^{(n)},
\end{aligned}
\right.
\qquad (3)
$$

$$a_{kk}^{(k)}=1(k=1,2,\ldots,n).$$

Цю систему розв’язують, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знаходять x_n і підставляють в передостаннє рівняння, з якого визначають x_{n-1}, і т.д.

Якщо система рівнянь з *n* невідомими має єдиний розв’язок, то ця система завжди може бути перетворена до трикутного вигляду.

Знайдемо розв’язок системи рівнянь

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1+x_2-3x_3&=6,\\
x_1+2x_2-x_3&=5,\\
2x_1-x_2+2x_3&=2
\end{aligned}
\right.
$$

за методом Гаусса.

- Складемо таблицю

$$
A_0:\quad
\begin{array}{cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -3 & 6 \\
1 & 2 & -1 & 5 \\
2 & -1 & 2 & 1
\end{array}
$$

Перший рядок віднімемо від другого. Далі помножимо перший рядок на другий і віднімемо від третього рядка. Дістанемо таблицю

$$
A_1:\quad
\begin{array}{cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -3 & 6 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & -3 & 8 & -11
\end{array}
$$

Помножимо другий рядок на третій і додамо до третього рядка:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & -3 & 6 \\
A_2: & 0 & 1 & 2 & -1 \\
 & 0 & 0 & 14 & -14
\end{array}$$

Поділивши останнє рівняння на 14, дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Послідовно знайдемо: $x_3 = -1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 2$.

2. **Матричний метод**

Матричний метод полягає в розв′язанні рівняння $X=A^{-1}B$, де
A^{-1} обернення матриця до матриці A
B матриця складена з вільних членів
X матриця складена з невідомих

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$, де Δ визначник матриці A.

Приклад Знайдемо розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

матричним методом.
$X=A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1*2*2 + 1*(-1)*2 + 1*(-1)*(-3) - 2*2*(-3) - 1*(-1)*(-1) - 1*1*2 = 14$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2*2 - (-1)*(-1) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2*1 - (-1)*2) = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1*(-1) - 2*2 = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(1*2 - (-3)*(-1)) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1*2 - 2*(-3) = 8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1*(-1) - 1*2) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1*2 - 1*1 = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(1*(-1) - 1*(-3)) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1*2 - 1*1 = 1$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 33 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Компоненти матриці X обраховуються наступним чином:
$X_1 = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} + A_{13} \cdot B_{31} = \; = 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 18 + 5 + 10 = 33$
$X_2 = A_{,1} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{23} \cdot B_{31} = = (-4) \cdot 6 + 8 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 = (-24) + 40 + (-4) = 12$
$X_{3,} = A_{31} \cdot B_{11} + A_{32} \cdot B_{21} + A_{33} \cdot B_{31} = = (-5) \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = (-30) + 15 + 2 = -13$

Отже, x_1=33/14, x_2=6/7, x_3=-13/14

Самостійна робота № 6

Тема: Застосування добутків векторів
Мета: формувати вміння та навики дії над векторами, знаходження скалярного та векторного добутку векторів

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Застосування скалярного добутку векторів.
2 Застосування векторного добутку векторів.

Практичні завдання:
Приклад. Дано трикутник АВС з координатами вершин А (-1;2;3), В(2;-1;0), С(-4;2;-3). Обчислити:
- периметр трикутника;
- кути трикутника;
- координати точки перетину медіан;
- довжину медіани ВД;
- площу трикутника.

Література:
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001, с 58-62.

Питання для самоконтролю:
1 Поняття скалярного добутку векторів.
2 Застосування скалярного добутку векторів.
3 Поняття векторного добутку векторів.
4 Застосування векторного добутку векторів.

Теоретичні відомості

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Означення. **Скалярним добутком векторів a** і **b** називається число $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними (рис. 3.18):

$$\boxed{\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi.} \qquad (1)$$

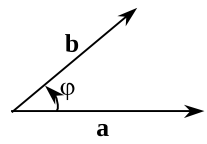


Рис. 3.18

Нехай $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ — проекція вектора **b** на вісь, паралельну вектору **a**. Тоді маємо:

$$\boxed{\begin{gathered} np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|b|\cos\varphi, \quad np_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=|a|\cos\varphi; \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|a|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|b|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \end{gathered}} \qquad (2)$$

Останнє співвідношення означає, що **скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на напрям першого.**

Якщо кут між векторами **a** та **b** гострий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$; якщо тупий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$; якщо прямий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Коли один із векторів **a**, **b** є нульовим, то його можна вважати ортогональним до будь-якого іншого вектора.

Наведемо аналітичні властивості скалярного добутку, що випливають із його означення.

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}; \\ &2)\, \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b}); \\ &3)\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2=|a|^2; \\ &4)\, \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}. \end{aligned}}$$

Остання рівність є наслідком формули (2) і властивості проекцій суми векторів:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|a|\,np_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|a|\,(\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{c})=$$
$$=|a|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+|a|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Отже, у разі скалярного множення суми векторів на вектор можна розкривати дужки. Нехай вектори **a** та **b** подано через їх проекції на координатні осі:

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}.$$

Запишемо таблицю скалярного множення для одиничних векторів **i**, **j**, **k** — **ортів системи координат**:

$$\begin{gathered} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0; \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0; \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \end{gathered}$$

Перемноживши скалярно вектори **a** та **b**, знайдемо їх скалярний добуток у проекціях на координатні осі:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.} \qquad (3)$$

Звідси маємо:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2, \quad |\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.}$$

Знаючи проекції векторів **a**, **b**, можна знайти кут між цими векторами:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|a|\cdot|b|},\quad \cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.}$$

Дано просторовий трикутник з вершинами $A(1, 2, -1)$, $B(2, 4, 1)$, $C(3, 0, 0)$. Знайдемо кут при вершині A.

• Розглянемо вектори

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{1, 2, 2\},\quad \mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{2, -2, 1\}$$

і з їх скалярного добутку визначимо косинус шуканого кута:

$$\cos\hat{A}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|a|\cdot|b|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-2)+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{0}{3\cdot 3}=0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів **a**, **b** дорівнює нулю, то кут при вершині A прямий. •

Позначимо α, β, γ кути між осями координат x, y, z та вектором **a**. Ці кути називаються **напрямними кутами**. Проекції вектора **a** на координатні осі подаються так:

$$\boxed{a_x=|a|\cos\alpha,\ a_y=|a|\cos\beta,\ a_z=|a|\cos\gamma.}\qquad (4)$$

Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються **напрямними косинусами вектора a**. Згідно з (4) маємо:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|a|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|a|},\ |a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.}\qquad (5)$$

Розглянемо вектор **a** у площині xy, який утворює кут 60° з віссю x і кут 30° з віссю y. Знайдемо напрямні косинуси вектора **a**:

• $\cos\alpha=\cos 60°=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\gamma=\cos 90°=0.$ •

Доведемо теорему косинусів для трикутника.

• Позначивши сторони трикутника векторами **a**, **b**, **c** (рис. 3.19), подамо вектор **c** через вектори **a** та **b**: **c** = **b** – **a**. Далі, виконавши перетворення, дістанемо шукану залежність — відому теорему косинусів:

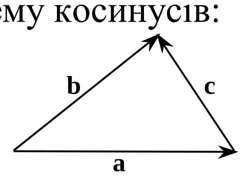


Рис. 3.19

$$c^2=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|b|^2-2|a|\cdot|b|\cos\varphi+|a|^2$$ •

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

***Означення*.** **Векторним добутком векторів a та b** називається вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, який задовольняє такі умови:

1) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярний до векторів **a** і **b**;

2) довжина $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах **a** та **b**;

3) якщо звести вектори **a**, **b** та $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ до спільного початку, то спостерігач, який міститься в кінці вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, бачитиме найкоротший поворот від вектора **a** до вектора **b** таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 3.20).

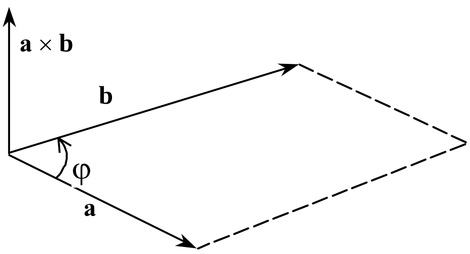


Рис. 3.20

З означення векторного добутку випливають такі його властивості

$$\boxed{\begin{aligned}&1)\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a};\\&2)\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\varphi;\\&3)\ \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b});\\&4)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.\end{aligned}}$$

Перші три властивості очевидні, останню властивість дистрибутивності наводимо без доведення.

Знайдемо векторний добуток векторів

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},\ \ \mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}\,.$$

Запишемо таблицю множення ортів **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0},\qquad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j},$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=i,$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=j,\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-i,\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}.$$

Виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})=\\&=a_xb_y\mathbf{k}-a_xb_z\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{i}+a_yb_x\mathbf{k}+a_zb_x\mathbf{j}-a_zb_y\mathbf{i}=\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)k.\end{aligned}$$

Векторний добуток векторів **a** та **b** можна подати у вигляді визначника:

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}}\qquad(1)$$

Знайдемо площу просторового трикутника з вершинами $A(1,\,2,\,1)$, $B(4,\,3,\,2)$, $C(2,\,4,\,4)$.

• Позначаючи вектори

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{3,1,1\},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{1,2,3\},$$

обчислюємо їх векторний добуток:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k},\ \ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{1^2+8^2+5^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$

Площа S трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах **a**, **b**:

$$S=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\frac{3}{2}\sqrt{10}\,.$$

Самостійна робота № 7

Тема: Загальні рівняння прямої і площини, їх дослідження
Мета: формувати вміння та навики досліджувати рівняння прямої та площини, записувати рівняння прямої і площини

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Загальне рівняння прямої, його дослідження.
2 Загальне рівняння площини, його дослідження.

Практичні завдання:
1. Дано три точки A, B, C на площині. Знайти:
   - рівняння прямих AB і AC, привести їх до загального виду;
   - відстань від точки B до прямої AC

   A(2;3), B(-4;4), C(5;5)

2. Піраміда задана вершинами A, B, C, Д. Знайти:
   - рівняння площин BCД і ACД та привести їх до загального виду;

   A(1;2;0), B(2;1;1), C(3;0;-1) ,Д(-2;-3;2)

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001, с 78, 84.

Питання для самоконтролю:
1 Назвати загальне рівняння прямої
2 Назвати частинні випадки із загального рівняння прямої
3 Назвати загальне рівняння площини
4 Назвати частинні випадки із загального рівняння площини

Теоретичні відомості

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Розглянемо на площині прямокутну систему координат x, y і знайдемо рівняння прямої, коли відомий вектор її нормалі $\mathbf{n}=\{A, B\}$ і задано точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої прямої (рис. 3.27).

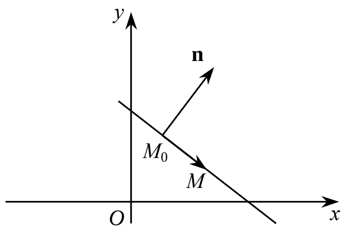


Рис. 3.27

За умовою вектор $\mathbf{M_0M}=\{x-x_0\ ,\ y-y_0\}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}=\{A, B\}$. Тому їх скалярний добуток $\mathbf{n}\mathbf{M_0M}=0$. Звідси маємо рівняння

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,} \qquad (1)$$

або

$$\boxed{\begin{aligned}&Ax+By+C=0,\\ &C=-Ax_0-By_0.\end{aligned}} \qquad (2)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої**.

На відміну від рівняння виду (1) змінні x, y входять до рівняння (2) рівноправно. Рівняння (1) завжди можна подати у вигляді (2).

Рівняння прямої (2) можна записати у вигляді ($y = kx + b$) лише за умови $B \neq 0$.

Коефіцієнти A, B при x, y у загальному рівнянні прямої є проекціями на координатні осі вектора її нормалі $\mathbf{n}$.

Справджується теорема.

***Теорема 1*. Будь-яка пряма на площині може бути задана лінійним рівнянням виду (2). Кожне лінійне рівняння виду (2), де $A^2 + B^2 > 0$, визначає деяку пряму.**

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше при виведенні рівняння (1). Доведемо друге твердження. Візьмемо довільне лінійне рівняння

$$Ax+By+C=0,\ A^2+B^2>0.$$

Оскільки коефіцієнти при x, y не перетворюються одночасно на нуль, завжди знайдуться значення $x = x_0$, $y = y_0$, при яких виконується рівність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Віднімаючи ці рівняння почленно, дістаємо рівність

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \qquad (3)$$

За допомогою векторів

$$\mathbf{n}=\{A, B\},\quad \mathbf{M_0M}=\{x-x_0\ ,\ y-y_0\}$$

рівність (3) можна записати у вигляді $\mathbf{n}\mathbf{M_0M}=0$.

Як бачимо з рис. 3.27, вектор $\mathbf{M_0M}$ тоді і тільки тоді буде перпендикулярним до ненульового вектора $\mathbf{n}$, коли точка $M(x, y)$ лежить на прямій, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до цього вектора. Звідси випливає рівняння (1), що визначає деяку пряму. Отже, теорему доведено. ♦

Нехай x, y — координати довільної точки на площині. Пряма (2) поділяє всю площину на дві півплощини. В одній півплощині виконується нерівність $Ax + By + C >$

0, а в іншій — нерівність
$Ax + By + C < 0$. На самій прямій маємо: $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо частинні випадки рівняння (2):

якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі x;
якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі y;
якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат;
якщо $A = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю x;
якщо $B = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю y.

Нагадаємо, що пряма проходить перпендикулярно до вектора $\mathbf{n}=\{A,\ B\}$.

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Виведемо рівняння площини у тривимірному просторі, узявши точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій площині і вектор $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$, перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на площині. Ця точка належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}$ (рис. 3.49).

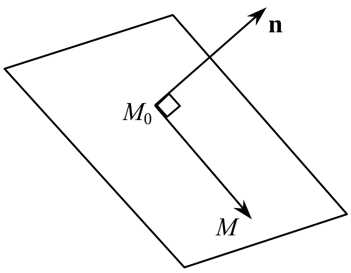


Рис. 3.49

Умова перпендикулярності вектора

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$$

до вектора $\mathbf{n}$ подається у вигляді

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.} \qquad (1)$$

Дістали **рівняння площини, що проходить через задану точку** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **перпендикулярно до заданого вектора** $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$**.**

Якщо позначимо сталу величину

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0, \qquad (2)$$

то рівняння (1) набере вигляду

$Ax+By+Cz+D=0.$
Це рівняння називається **загальним рівнянням площини**.

(3)

Рівняння (3) є лінійним відносно координат x, y, z.

Справджується така теорема.

***Теорема*. Будь-яка площина у тривимірному просторі визначається лінійним рівнянням (3). Кожному лінійному рівнянню при** $A^2+B^2+C^2>0$ **відповідає в цьому просторі деяка площина.**

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше. Доведемо, що будь-якому лінійному рівнянню виду (3) відповідає деяка площина. Візьмемо вектор $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$ і знайдемо числа x_0, y_0, z_0, які задовольняють рівняння

$$Ax_0+Bx_0+Cz_0+D=0. \qquad (4)$$

Розглянемо тепер дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$. Згідно з (3) та (4) рівняння (1) можна записати у векторному вигляді:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_0M} = 0 .$$

Отже, вектор $\mathbf{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}$. Це означає, що точка $M(x, y, z)$ належить площині, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\mathbf{n}$. Теорему доведено. ♦

З доведення випливає, що в загальному рівнянні площини коефіцієнти A, B, C при x, y, z є проекціями вектора, перпендикулярного до площини цієї площини.

За допомогою векторів

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \qquad \mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

запишемо рівняння площини *у векторній формі*:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} + D = 0 ,$$

або

$$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0.}$$

Розглянемо функцію трьох змінних

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D .$$

За допомогою цієї функції увесь простір можна розбити на два півпростори: в одному виконується нерівність $f(x, y, z) > 0$, а в іншому — нерівність $f(x, y, z) < 0$. На площині, яка розмежовує ці підпростори, виконується рівність $f(x, y, z) = 0$.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Якщо одна з координат x, y, z не входить до рівняння поверхні $f(x, y, z) = 0$, то зі зміною цієї координати вид поверхні не змінюється. Така поверхня буде циліндричною із твірною, що паралельна осі, яка відповідає зазначеній координаті.

Дамо інтерпретацію загального рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

в разі, якщо один або кілька його коефіцієнтів перетворюються на нуль.

1. $A = 0$ — площина паралельна осі x.
2. $B = 0$ — площина паралельна осі y.
3. $C = 0$ — площина паралельна осі z.
4. $D = 0$ — площина проходить через початок координат.
5. $A = 0$, $B = 0$ — площина перпендикулярна до осі z.
6. $A = 0$, $C = 0$ — площина перпендикулярна до осі y.
7. $B = 0$, $C = 0$ — площина перпендикулярна до осі x.
8. $A = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь x.
9. $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь y.
10. $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь z.
11. $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, y.
12. $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, z.
13. $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі y, z.

У загальному випадку, коли жодний із коефіцієнтів рівняння не перетворюється на нуль, рівняння площини можна звести до вигляду

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \qquad (1)$$

Площина, що визначається рівнянням (1), перетинає осі координат у точках $x = a$, $y = b$, $z = c$. Тому рівняння (1) називається **рівнянням площини у відрізках на осях.**

Зведемо рівняння площини

$$2x+3y+z-6=0$$

до вигляду (1). Для цього поділимо обидві його частини на 6:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1.$$

Отже, площина перетинає осі координат у точках $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$. •

Самостійна робота № 8

Тема: Рівняння прямої в просторі
Мета: формувати вміння та навики знаходження кута між двома прямими, між прямою і площиною, записувати умови паралельності і перпендикулярності двох прямих і прямої і площини

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Різні види рівнянь прямої в просторі.
2 Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярнос прямих.
3 Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Практичні завдання:

1. Дано три точки A, B, C на площині. Знайти:
   - кут A;
   - рівняння прямої, що проходить через точку B перпендикулярно прямій AC;
   - рівняння прямої через точку B паралельно прямій AC;

   A(1;3), B(4;2), C(-3;-4)
2. Піраміда задана вершинами A, B, C, Д. Знайти:
   - кут між площинами BCД і ACД;
   - довжину висоті AM.

   A(-1;3;3), B(1;-2;1), C(-3;1;1) ,Д(-2;3;-2)

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001, с 89-96.

Питання для самоконтролю:

1 Різні види рівнянь прямої в просторі.
2 Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярнос прямих.
3 Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Теоретичні відомості

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Будь-яка пряма лінія у просторі подається системою двох рівнянь які задають (коли розглядати кожне з них зокрема) дві різні площини, що проходять через цю пряму.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}.} \qquad (1)$$

Рівняння (1), узяті разом, називаються **загальними рівняннями прямої**. Напрямний вектор $\mathbf{s}$ цієї прямої ортогональний до кожної з нормалей

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1,\ B_1, C_1\}, \quad \mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Отже, можна вважати що

$$\boxed{\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.}$$

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої до канонічного її рівняння, достатньо взяти дві різні точки на прямій і скористатися рівнянням (2) із підрозд. 3.5.6.

Перейдемо від загального рівняння прямої

$$x + y + 2z + 4 = 0, \;\; x - y - 2z - 6 = 0$$

до канонічного.

• Візьмемо $z_1 = 0$, та із системи рівнянь $x_1 + y_1 + 4 = 0$, $x_1 - y_1 - 6 = 0$ знайдемо $x_1 = 1$, $y_1 = -5$.

Покладемо $z_2 = 1$, то із системи рівнянь $x_2 + y_2 + 6 = 0$, $x_2 + y_2 - 8 = 0$ знайдемо $x_2 = 1$, $y_2 = -7$. Канонічне рівняння прямої набере вигляду

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z}{1}. \;\bullet$$

Щоб дістати довільну площину, яка проходить через пряму (1), застосовують пучок площин:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \qquad (2)$$

Теорема. **Коли площини (1) не паралельні, то вибором параметра λ в рівнянні (2) можна утворити будь-яку площину, що проходить через пряму (1), окрім другої площини.**

Складемо рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ і точку $M_1(1, 1, 1)$.

• Знаходимо загальні рівняння прямої

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2}, \qquad \frac{x-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

або

$$2x - y = 0, \quad x + z - 4 = 0.$$

Утворимо пучок площин

$$2x - y + \lambda(x + z - 4) = 0$$

і визначимо ту з них, якій належить точка $M_1(1, 1, 1)$. Маємо

$$1 - 2\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Остаточно запишемо рівняння шуканої площини:

$$2x - y + \frac{1}{2}(x + z - 4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + z - 4 = 0. \;\bullet$$

Знайти проекцію прямої, заданої рівняннями $x + 2y - z + 3 = 0$, $2x - y + 2z - 1 = 0$, на площину $x+y+2z-3=0$.

• Утворимо пучок площин

$$x+2y-z+3+\lambda(2x-y+2z-1)=0$$

і візьмемо в ньому таку площину, яка ортогональна до площини проектування:

$$(1+2\lambda)\cdot 1+(2-\lambda)\cdot 1+(-1+2\lambda)\cdot 2=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5}.$$

Остаточно записуємо загальне рівняння проекції:

$$3x+11y-7z+16=0,\ x+y+2z-3=0. \ \bullet$$

ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Дано площину

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

а також пряму з канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Знайдемо кут φ між цією прямою і заданою площиною. Обчислимо насамперед кут $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ між вектором нормалі **n** і напрямленим вектором прямої **s** (рис. 3.51).

$$\mathbf{n}=\{A, B, C\},\ \mathbf{s}=\{l, m, n\}.$$

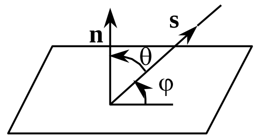


Рис. 3.51

Згідно зі співвідношенням

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$$

маємо:

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.} \qquad (1)$$

Умова паралельності площини та прямої:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}=0,\quad \boxed{Al+Bm+Cn=0}. \qquad (2)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\boxed{\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}}. \qquad (3)$$

Щоб знайти точку перетину прямої і площини, скористаємося параметричними рівняннями прямої (3) із підрозд. 3.5.6. Підставляючи x, y, z у рівняння площини, дістаємо рівняння для t:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+t(Al+Bm+Cn)=0. \qquad (4)$$

1. Якщо $Al+Bm+Cn\neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці.

2. Якщо $Al+Bm+Cn=0$, то пряма паралельна площині. Якщо $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій не лежить на площині, то рівняння (4) не має розв'язків. При цьому пряма проходить на деякій ненульовій відстані від площини.

3. Якщо $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (4) виконується при всіх значеннях t. Усі точки на прямій належать площині.

Знайти проекцію точки $M_0(1, 2, 3)$ на площину $2x + y + 2z - 1 = 0$.

• Для розв’язування задачі достатньо з точки M_0 опустити на площину перпендикуляр і знайти точку його перетину з площиною (рис. 3.52).

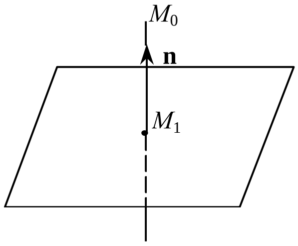


Рис. 3.52

Напрямний вектор прямої **s** колінеарний до вектора **n** нормалі до площини. Маємо $\mathbf{n} = \{2, 1, 2\}$. Отже, рівняння перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2} = t.$$

Підставивши вирази

$$x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 3 + 2t$$

у рівняння площини, дістанемо t

$$2(1+2t) + (2+t) + 2(3+2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

З параметричних рівнянь прямої знаходимо координати точки проекції $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $x_1 = -1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 1.$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дано дві прямі, що визначаються рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}. \qquad (1)$$

Прямі (1) паралельні**, якщо виконується умова**

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Прямі (1) взаємно перпендикулярні**, якщо**

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Кут між прямими визначається кутом θ між їх напрямними векторами:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1|\,|\mathbf{s}_2|}, \quad \cos\theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Самостійна робота № 9

Тема: Криві другого порядку
Мета: формувати вміння та навики знаходження центра еліпса та його побудови, центра гіперболи та її побудови, центра параболи та її побудови

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Коло.
2 Еліпс. Рівняння еліпса із зміщеним центром.
3 Гіпербола. Рівняння гіперболи із зміщеним центром.
4 Парабола. Паралельний перенос параболи.

Практичні завдання:

1. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

2. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

3. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

4. До параболи $y^2 = 12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x + y - 7 = 0$.

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникум.-М.:Наука, 1990, с 145-171.

Питання для самоконтролю:

1 Виконати побудову кола.
2 Пояснити принцип знаходження центра еліпса та його побудова.
3 Пояснити принцип знаходження центра гіперболи та її побудови.
4 Пояснити поняття паралельного переносу параболи.

Теоретичні відомості

Криві другого порядку

Розглянемо лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.19)$$

Рівняння (2.19) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс. *Означення*. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

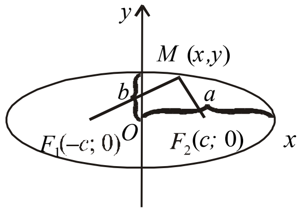


Рис. 2.16

На рис. 2.16 зображено F_1 ($-c$, 0), F_2 (c, 0) — фокуси еліпса, M (x, y) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.20)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2.20). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки (0, b) і (0, $-b$) є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно (a, 0); ($-a$; 0) є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.20) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 2.16 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 2.17, з якого бачимо, що точки F_1 ($-c$, 0) і F_2 (c, 0) — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

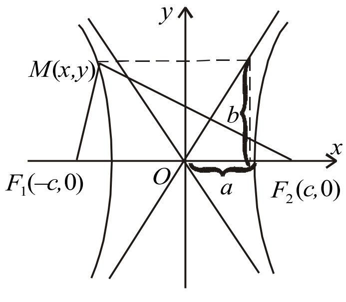


Рис. 2.17

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь *Oy*. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю *Ox*. Розглянемо ще рівняння прямих $y=\pm\frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей *Ox* і *Oy*, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 2.17.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі *Ox*.

Дві прямі, рівняння яких $x=-\frac{a}{\varepsilon}$; $x=\frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0\le\varepsilon<1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon}>a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі *Oy* і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі *Oy* і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: **якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стале й дорівнює ексцентриситету, тобто** $\varepsilon=\frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола*, *якщо* $\varepsilon > 1$.

Парабола. *Означення*. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

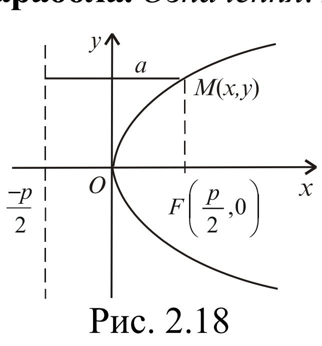


Рис. 2.18

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 2.18):

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px$$

— **канонічне рівняння параболи**, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі *Ox*, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 2.18.

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис. 2.19).

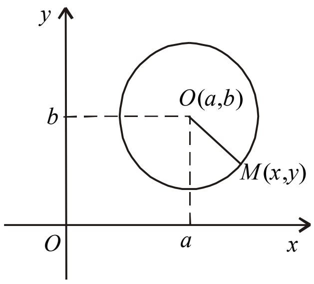


Рис. 2.19

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$. Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2.21)$$

— **канонічне рівняння кола**.

Тут $(a,\ b)$ — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Приклади:

1. Дано еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, через точку A (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

● Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння (2.15) $(y-1)=k\,(x-1)$. Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y-1=k(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+9k^2)x^2+18k(1-k)x+9(1-k)^2-36=0 \\ y=kx+1-k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1), (x_2, y_2) мають задовольняти рівності: $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ і $\frac{y_1+y_2}{2}=1$. З теореми Вієта і останньої умови маємо: $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2}=2,$ звідки $k=-\frac{4}{9}$. Шукане рівняння хорди набирає вигляду $y-1=-\frac{4}{9}(x-1)$, або $4x+9y-13=0$.

2. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;

3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;

4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

● 1) Координати фокусів F_1 $(-c;\ 0)$; F_2 $(c;\ 0)$, тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$ маємо: $a = 12$, $b = c - a = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і $a = 6$; $b = 6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3},$ звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$, або $b=\frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\quad a^2=\frac{171}{25},\quad b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$

3. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

● Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2-\frac{2p}{k}y+\frac{2pb}{k}=0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2}-\frac{2pb}{k}=0\Rightarrow p(p-2bk)=0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

4. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

● Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25, \text{ або } (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25,$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36, \text{ або } (x+1)^2 + (y-6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого — C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням (2.16), знайдемо

$$\frac{y+4}{6+4}=\frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ — шукане рівняння центрів кіл.

Самостійна робота № 10

Тема: Таблиця похідних
Мета: ознайомити з таблицею похідних елементарних функцій, формувати вміння та навички знаходження похідних функцій

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Таблиця похідних

Практичні завдання:
Знайти похідні функцій:

1) $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$

2) $f(x) = \sqrt{x} \cdot x^3$

3) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 8x + 3$

4) $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 + 3x + 1)$

5) $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2 + 3x + 5}$

6) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

7) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 3}$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумс -М.:Наука, 1990, с 215-216.

Питання для самоконтролю:
1 Назвати правила диференціювання.
2 Назвати формули похідних функцій.
3 Навести приклади диференціювання функцій.

Теоретичні відомості

Таблиця похідних

$$(c)' = 0$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(a^{x})' = a^{x} \ln a$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(shx)' = chx$$

$$(chx)' = shx$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Самостійна робота № 11

Тема: Диференціювання складної функції. Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень
Мета: набуття навиків диференціювання складних функцій, знаходження диференціала функцій і застосування його до наближених обчислень

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Диференціювання складної функції
2 Диференціал функції.
3 Застосування диференціала до наближених обчислень

Практичні завдання:

Знайти похідні функцій:	Знайти диференціал функцій:	Обчислити наближено
1) $f(x) = e^{x^2+3x+4}$	1) $f(x) = (x^2+3)^7$	1) $f = 2x^{3-3x+5}$ x=3,001
2) $f(x) = \ln(x^3+3x+5)$	2) $f(x) = \ln\sqrt{x}$	2) $5{,}013^3$
3) $f(x) = e^{\cos x}$	3) $f(x) = \sin x^2$	3) $\sqrt{99.5}$
4) $f(x) = \ln\sin x$	4) $f(x) = \cos 3x$	
5) $f(x) = \sqrt{3x^2+5}$	5) $f(x) = tg\,\dfrac{x}{2}$	

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов -М.:Наука, 1990, с 211-213.

Питання для самоконтролю:
1 Яка функція називається складною.
2 Формула для обчислення похідної складної функції.
3 Що таке диференціал.
4 Назвати властивості диференціала.
5 Записати формулу застосування диференціала до наближених обчислень.

Теоретичні відомості

Тема: Диференціювання складної функції. Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціювання складної функції

Нагадаємо, що коли $y = y(u)$ і $u = u(x)$ - диференційовні функції, то складна функція $y = y(u(x))$ є також диференційовною, причому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого скінченного числа диференційовних функцій: похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, які її складають.

Розв'язання прикладів

Продиференціювати дані функції.

Приклад 1. $y = (x^2 + 1)^4$.

Розв'язання. Маємо складну степеневу функцію з проміжним аргументом $u = x^2 + 1$. Тому функцію можна подати у вигляді $y = u^4$, де $u = x^2 + 1$. За формулою (11)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^4)'_u \cdot (x^2 + 1)'_x = 4u^3 \cdot 2x = 8x(x^2 + 1)^3.$$

Приклад 2. $y = \sin 3x$.

Розв'язання. Аргументом даної функції є не x а $3x$ (функція від x). Отже маємо складну функцію, яку можна подати у вигляді $y = \sin u$, де $u = 3x$. Тоді за формулою (11)

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (3x)'_x = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

Приклад 3. $y = \ln^2 x = (\ln x)^2$.

Розв'язання. Це складна степенева функція з проміжним аргументом $u = \ln x$. Функція може бути подана у вигляді $y = u^2$, де $u = \ln x$. Знаходячи похідні y'_u і u'_x та підставляючи одержані вирази до формули (11), маємо

$$y'_u = 2u = 2\ln x, \quad u'_x = \frac{1}{x}, \quad y'_x = \frac{2\ln x}{x}.$$

Приклад 4. $y = 3^{\sin x}$.

Розв'язання. Подавши дану функцію у вигляді $y = 3^u$, де $u = \sin x$, за правилом диференціювання складної функції маємо

$$y'_x = 3^u \ln 3 \cdot \cos x = 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3 .$$

Приклад 5. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

Розв'язання. Покладемо $y = \operatorname{arctg} u$, де $u = x^2$. Тоді

$$y'_x = (\operatorname{arctg} u)'_u \cdot \left(x^2\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4} .$$

Приклад 6. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання. Подавши функцію у вигляді $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \ln x$ і скориставшись правилом диференціювання складної функції одержимо

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \left(e^u\right)'_u \cdot \left(\sqrt{v}\right)'_v \cdot (\ln x)'_x = e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} .$$

Приклад 7. $y = \left(1 + \sin^2 x\right)^4$.

Розв'язання. Покладемо $y = u^4$, $u = 1 + v$, $v = z^2$, $z = \sin x$. Тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_z \cdot z'_x = \left(u^4\right)'_u \cdot (1+v)'_v \cdot \left(z^2\right)'_z (\sin x)'_x = 4u^3 \cdot (0+1) \cdot 2z \cdot \cos x =$$

$$= 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \sin 2x .$$

Розв'язання цього прикладу коротко можна записати так:

$$y'_x = 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \cdot \left(1 + \sin^2 x\right)' = 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \cdot \left(0 + 2 \sin x \cdot (\sin x)'\right) =$$

$$= 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \sin 2x ,$$

або ще коротше : $y' = 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \cdot (0 + 2 \sin x \cdot \cos x) = 4\left(1 + \sin^2 x\right)^3 \sin 2x$.

Приклад 8. $y = \log_3\left(x^2 - 1\right)$.

Розв'язання. За формулою (22а) знаходимо

$$y' = \frac{1}{\left(x^2 - 1\right)\ln 3} \cdot \left(x^2 - 1\right)' = \frac{2x}{\left(x^2 - 1\right)\ln 3} .$$

Приклад 9. $y = \ln^4 \sin x = (\ln \sin x)^4$.

Розв'язання. Застосовуючи послідовно формули (12а), (21а) і (15), матимемо

$$y' = 4(\ln \sin x)^3 \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 4 \ln^3 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x .$$

Приклад 10. $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}} = \left(\ln \sin \frac{x+3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$y' = \frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x+3}{4}} \cdot \cos\frac{x+3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12 \cdot \sqrt[3]{\ln^2 \sin\frac{x+3}{4}}}.$$

Приклад 11. $y = a \cdot e^{-k^2 x^2}$.

Розв'язання. Для знаходження похідної застосовуємо послідовно формули (9а), (20а), (9а) і (12). Тоді

$$y' = a \cdot \left(e^{-k^2x^2}\right)' = a \cdot e^{-k^2x^2}\left(-k^2x^2\right)' = -ak^2 \cdot e^{-k^2x^2}\left(x^2\right)' = -2ak^2 x \cdot e^{-k^2x^2}.$$

Приклад 12. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

Розв'язання. Згідно з формулами (19а), (10), (12) і (21) маємо

$$y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x' \cdot \ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} =$$

$$= 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Приклад 13. $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$.

Розв'язання. Диференцюючи почленно, одержимо

$$y' = \left(3\sin^2 x\right)' - \left(\sin^3 x\right)' = 3 \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' - 3\sin^2 x(\sin x)' =$$

$$= 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (2 - \sin x) = \frac{3}{2} \cdot (2 - \sin x) \cdot \sin 2x.$$

Приклад 14. $y = a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формули (9а), (17а), (8), (9а) і (12), знаходимо

$$y' = a \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)\right)' = a \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{k} + b\right)} \cdot \left(\frac{x}{k} + b\right)' = \frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k} + b\right)}.$$

Приклад 15. $y = e^{-x^2} \ln x$.

Розв'язання. Задана функція є добутком двох функцій, одна з яких є складною. Тому, скориставшись формулами (9), (20а), (12) і (21), одержимо

$$y' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot \ln x + e^{-x^2} \cdot (\ln x)' = e^{-x^2}(-2x)\ln x + e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} = e^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2x\ln x\right).$$

Приклад 16. $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right)$.

Розв'язання. Маємо складну логарифмічку функцію з проміжним аргументом $x^2 - \sin x$. Продиференціювавши її, одержимо

$$y' = \frac{1}{\left(x^2 - \sin x\right) \cdot \ln 3} \cdot (2x - \cos x).$$

Диференціал функції та його застосування до наближених обчислень

1. Означення диференціала

Із означення похідної $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і границі змінної випливає, що $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ або $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $\alpha \to 0$.

Головна лінійна відносно приросту незалежної Δx частина приросту диференційовної функції називається ії диференціалом і позначається символом dy або $df(x)$. Таким чином, за означенням $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$ або $dy = y' \cdot \Delta x$.

Оскільки $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, то

$$dy = y'dx = f'(x)dx, \tag{29}$$

звідки $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$, тобто похідна функції в точці x дорівнює відношенню диференціала цієї функції в цій точці до диференціала аргументу.

Як бачимо, знаходження диференціала функції зводиться до знаходження її похідної.

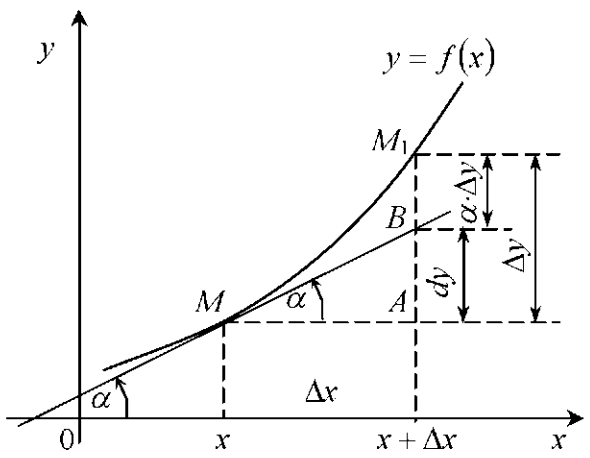
Операція знаходження диференціала функції, як і операція знаходження похідної, називається диференціюванням цієї функції.

2. Геометричне тлумачення диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x. Тоді в точці $(x; f(x))$ графік функції матиме дотичну (мал.7), нахилену до додатнього напрямку осі Ox під кутом α, $\mathrm{tg}\alpha = f'(x)$. З мал.7 видно, що

$$AB = MA \cdot \mathrm{tg}\alpha = f'(x) \cdot \Delta x = df(x),$$

тобто диференціал функції в точці x дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x, коли незалежна змінна дістає приріст Δx.



Мал.7

3. Інваріантність форми диференціала

Якщо x - незалежна змінна, а $f(x)$ - диференційовна функція від x, то

$df(x) = f'(x) \cdot dx$.

Припустимо, що $u = \varphi(x)$ - диференційовна функція від x. Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ матиме похідну, яка дорівнює

$$y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x) = y'_u u'_x.$$

Диференціал цієї складної функції запишемо у вигляді

$$dy = y'_x dx = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) dx = f'_u(u) \cdot u'_x dx = f'(u) \cdot du.$$

Отже диференціал функції обчислюється за формулою

$$df(u) = f'(u) \cdot du$$

незалежно від того, буде u незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією від x, тобто його форма залишається незмінною (інваріантною).

Слід зауважити, що коли x - незалежна змінна, то $dx = \Delta x$. Якщо ж x - функуія від t, то $dx = x'(t) \cdot dt$ і, отже, взагалі кажучи $dx \neq \Delta x$.

4. Основні правила і формули диференціювання

З основних правил знаходження похідних випливають основні правила знаходження диференціалів, які мають такий вигляд:

$$d(C) = 0;$$

$$d(u + v - z) = du + dv - dz;$$

$$d(uv) = udv + vdu;$$

$$d(Cu) = Cdu;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$df(u) = f'(u) du.$$

Слід пам’ятати, що в наведених правилах $C = const$, а u, v і z - диференційовні функції.

Оскільки диференціал і похідна зв’язані рівністю (29), то з таблиці похідних основних функцій дістаємо таблицю диференціалів цих функцій. Наприклад,

$$dx^n = nx^{n-1} dx,$$

$$d \sin x = \cos x \cdot dx,$$

$$d \ln x = \frac{1}{x} \cdot dx,$$

$$de^x = e^x dx$$

і т.д.

Зрозуміло, що немає потреби виписувати всі формули. Пропонуємо скласти таблицю диференціалів основних елементарних функцій самостійно.

Наближені обчислення за допомогою диференціалів

При достатньо малих значеннях Δx

$$\Delta y \approx dy \quad \text{або} \quad f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x, \tag{30}$$

де $\Delta x = x - x_0$.

Формулою (30) зручно користуватися тоді, коли відомо значення функції $f(x)$ в точці x_0 і треба знайти її значення в точці $x_0 + \Delta x$, де Δx досить мале.

Розв'язання прикладів

Знайти диференціали даних функцій.

Приклад 1. $S = \dfrac{1}{1-t^2}$.

Розв'язання. За формулою (29) маємо

$$dS = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)' dt = -\frac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2}dt = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Приклад 2. $y = \operatorname{tg}^2 x$.

Розв'язання. За формулою (29) маємо

$$dy = \left(\operatorname{tg}^2 x\right)' dx = 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \cdot dx.$$

Приклад 3. $y = 5^{\ln \operatorname{tg} x}$.

Розв'язання. За формулою (29) маємо

$$dy = \left(5^{\ln\operatorname{tg} x}\right)' dx = 5^{\ln\operatorname{tg} x} \ln 5 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = 5^{\ln\operatorname{tg} x} \ln 5 \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} \cdot dx = 5^{\ln\operatorname{tg} x} \frac{2\ln 5}{2\sin 2x} \cdot dx.$$

Приклад 4. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$.

Розв'язання. За формулами зведення $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$. Отже, $\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right) = \ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$.

Тепер згідно з формулою (29) будемо мати

$$dy = \left(\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)' dx = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot dx = -\frac{dx}{4\cos\frac{x}{4} \cdot \sin\frac{x}{4}} = -\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Приклад 6. Обчислити y при $x = 1$ і $dx = 0.2$, якщо $y = 3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\ldots} + 6^{\sqrt{x}}$

Тоді за формулою (30) маємо

$$\sqrt{\frac{(2.037)^2-3}{(2.037)^2+5}} \approx \frac{1}{3} + \frac{16}{27} \cdot 0.037 \approx 0.333 + 0.022 = 0.355.$$

<u>Приклад 9.</u> Обчислити наближено приріст функції $y = x^2 + 2x + 3$, коли x змінюється від 2 до 1.98.

<u>Розв'язання.</u> Приріст функції наближено дорівнює її диференціалу , тобто $\Delta y \approx dy$. А тому спочатку загальний вираз для диференціала даної функції

$$dy = (2x+2)dx.$$

Підставляючи значення $x = 2$, $dx = \Delta x = 1.98 - 2 = -0.02$ в здобуту формулу, знаходимо значення диференціала:

$$dy = (2 \cdot 2 + 2) \cdot (-0.02) = -0.12.$$

Отже , шуканий приріст функції наближено дорівнює -0.12.

<u>Приклад 10 .</u>Обчислити Δy і dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ і $\Delta x = 0.01$.

<u>Розв'язання.</u> Спочатку знайдемо загальний вираз для Δy і dy;

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - (x^2 - 2x) =$$

$$= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x = (2x-2)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = y'\Delta x = (x^2 - 2x)' \Delta x = (2x-2)\Delta x.$$

При $x = 3$ і $\Delta x = 0.01$ маємо

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=3 \\ \Delta x = 0.01}} = (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0.01 + (0.01)^2 = 0.04 + 0.0001 = 0.0401;$$

$$dy\Big|_{\substack{x=3 \\ \Delta x = 0.01}} = (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0.01 = 0.04.$$

Відзначимо, що різниця $\Delta y - dy = 0.0401 - 0.04 = 0.0001$ є нескінченно малою вищого порядку щодо $\Delta x = 0.01$.

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{\frac{4-3}{4+5}} = \frac{1}{3} \quad \text{і} \quad \Delta x = x - x_0 = 2.037 - 2 = 0.037.$$

Знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$, а також її значення при $x_o = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}} \cdot \frac{2x(x^2+5) - 2x(x^2-3)}{(x^2+5)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}} \cdot \frac{8x}{(x^2+5)^2};$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot \frac{16}{81} = \frac{16}{27}.$$

Самостійна робота № 12

Тема: Знаходження найбільшого та найменшого значень функції
Мета: набуття навиків знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Найбільше та найменше значення функції на проміжку

Практичні завдання:
Найбільше та найменше значення функції на заданих проміжках:

1) $y = x^2 - 6x + 13$, x є [0;6]

2) $y = 8 - 0.5x^2$, x є [-2;2]

3) $y = 6x^2 - x^3$, x є [-1;6]

4) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, x є [1;3]

5) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, x є [-4;4]

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов -М.:Наука, 1990, с 236-240.

Питання для самоконтролю:
1 Знаходження критичних точок на даному проміжку.
2 Знаходження функції в даній точці.
3 Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку.

Теоретичні відомості

Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ **на проміжку** $[a; b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a; b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).
2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов'язково виясняти, чи буде в них екстремум).
3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 5x + \frac{1}{5x}$ на проміжку [0,01; 100].

● У даному випадку похідна $f'(x) = \frac{25x^2 - 1}{5x}$ в інтервалі [0,01; 100] має тільки один корінь — $x = 0,2$. Обчислимо значення функції в стаціонарній точці $x = 0,2$ і на кінцях проміжку [0,01; 100]:

$$f(0,2) = 2, \ f(0,01) = f(100) = 100,01.$$

Звідси

$$\max_{x \in [0,01; 100]} f(x) = 100,01, \quad \min_{x \in [0,01; 100]} f(x) = 2 .$$

Самостійна робота № 14

Тема: Таблиця основних невизначених інтегралів
Мета: формувати вміння та навики знаходження невизначених інтегралів застосовуючи таблицю основних невизначених інтегралів

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Таблиця основних невизначених інтегралів

Практичні завдання:
Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$

2) $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$

3) $\int (5x^2 - 2x + 1)dx$

4) $\int \cos x dx$

5) $\int \sin x dx$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990, с 251-252.

Питання для самоконтролю:
1 Назвати формули знаходження невизначених інтегралів.
2 Навести приклади знаходження невизначених інтегралів.

Теоретичні відомості

Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right)$;
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;
3. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$;
4. $\int e^{u} du = e^{u} + C$;
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$;
6. $\int \cos u du = \sin u + C$;
7. $\int tgu du = -\ln|\cos u| + C$;
8. $\int ctgu du = \ln|\sin u| + C$;
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$;
11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + C$;
12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;
14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$;
15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C$;
16. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C$;

Самостійна робота № 15

Тема: Інтегрування заміною змінної та частинами
Мета: формувати вміння та навики знаходження невизначеного інтеграла методом заміною змінної та інтегрування частинами

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Інтегрування заміною змінної.
2 Інтегрування частинами.

Практичні завдання:
Обчислити інтеграли:

1) $\int (9-x)^8 dx$	4) $\int xe^x dx$
2) $\int \sin^4 x \cos x dx$	5) $\int (x+7)^5 dx$
3) $\int x \cos x dx$	6) $\int x \ln x dx$

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. –М.: Наука, 1990, с 255-266.

Питання для самоконтролю:

1 Пояснити суть методу знаходження невизначеного інтеграла методом заміни змінної.

2Пояснити суть методу знаходження невизначеного інтеграла частинами.

3 Вказати типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами.

Теоретичні відомості

Метод інтегрування підстановкою (заміна змінної)

Інтегрування методом підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування (тобто підстановкою). При цьому заданий інтеграл приводиться до нового інтеграла, який є табличним або таким, що зводиться до нього (у разі «вдалої підстановки»). Загальних методів підбору підстановок не існує. Уміння правильно визначити підстановку отримується практикою.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Зробимо підстановку $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – функція, що має неперервну похідну.

Тоді $dx=\varphi'(t)dt$ і на підставі властивості інваріантності формули інтеграції невизначеного інтеграла отримуємо *формулу інтегрування підстановкою*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \tag{2.1}$$

Формула (2.1) також називається ***формулою заміни змінних*** в невизначеному інтегралі. Після знаходження інтеграла правої частини цієї рівності слід перейти від нової змінної інтеграції t назад до змінної x.

Іноді доцільно підбирати підстановку у вигляді $t=\varphi(x)$, тоді $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$, де $t=\varphi(x)$. Іншими словами, формулу (2.1) можна застосовувати справа наліво.

Приклад 1. Знайти $\int e^{\frac{x}{4}}dx$.

□ Покладемо $x=4t$, тоді $dx=4dt$. Отже $\int e^{\frac{x}{4}}dx=4\int e^{t}dt=4e^{t}+C=4e^{\frac{x}{4}}+C$. □

Приклад 2. Знайти $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$.

□ Нехай $\sqrt{x-3}=t$, тоді $\sqrt{x-3}=t$, $dx=2tdt$. Тому

$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx=\int\left(t^{3}+3\right)\cdot t\cdot 2tdt=$

$=2\int\left(t^{4}+3t^{2}\right)dt=2\int t^{4}dt+6\int t^{2}dt=2\cdot\frac{t^{5}}{5}+6\cdot\frac{t^{3}}{3}+C==\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C$. □

Приклад 3. Отримати формулу $\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right|+C$.

□Позначимо $t=\sqrt{u^{2}+a^{2}}+u$ (підстановка Ейлера). Тоді $dt=\frac{2u}{2\sqrt{u^{2}+a^{2}}}du+du$,

тобто $dt=\frac{\sqrt{u^{2}+a^{2}}+u}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}du$.

Звідси

$$\frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}=\frac{dt}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}+u}=\frac{dt}{t}.$$

Отже

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right|+C. \ \square$$

Приклад 4. Знайти $\int x\cdot(x+2)^{100}dx$.

 Нехай $x+2=t$. Тоді $x=t-2$, $dx=dt$. Маємо:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}dx=\int(t-2)\cdot t^{100}dt=\int t^{101}dt-2\int t^{100}dt=$$

$$=\frac{t^{102}}{102}-2\cdot\frac{t^{102}}{101}+C=\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C.$$

Приклад 5. Знайти $\int\frac{dx}{e^x+1}$.

 Позначимо $e^x=t$. Тоді $x=\ln t$, $dt=\frac{dt}{t}$. Отже

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{dt}{t^2+t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right|+$$

$$+C=-\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right|=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

Тут використовується формула 16 таблиці основних інтегралів.

Метод інтегрування частинами

Нехай $u=u(x)$ і $\upsilon=\upsilon(x)$ - функція, що має неперервні похідні. Тоді $d(u\upsilon)=u\cdot d\upsilon+\upsilon\cdot du$. Проінтегрувавши цю рівність, отримаємо

$$\int d(u\upsilon)=\int ud\upsilon+\int\upsilon du \quad \text{або} \quad \int ud\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du$$

Отримана формула називається ***формулою інтегрування частинами***. Вона дає можливість звести обчислення інтеграла $\int ud\upsilon$ до обчислення інтеграла $\int\upsilon du$, який може виявитися істотно простішим за початковий.

Інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз заданого інтеграла представляється яким-небудь чином у вигляді добутку двох співмножників u і dv (це, як правило, можна здійснити декількома способами); потім, після знаходження v і du використовується формула інтегрування частинами. Іноді цю формулу потрібно використовувати кілька разів.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1 Інтеграл вигляду $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\cdot\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$,

де $P(x)$- многочлен, k – число. Зручно покласти $u=P(x)$, а за dv позначити решту співмножників.

2 Інтеграли вигляду $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx, \int P(x)arcctgxdx$.

Зручно покласти $P(x)dx=d\upsilon$, а за u позначити решту співмножників.

3 Інтеграли вигляду $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx, \int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, де a і b – числа. За u можна прийняти функцію $u=e^{ax}$.

Приклад 6. Знайти $\int(2x+1)e^{3x}dx$.

 Нехай $\left[\begin{array}{l} u=2x+1 \Rightarrow du=2dx \\ d\upsilon=e^{3x}dx \Rightarrow \upsilon=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можна покласти $C=0$). Отже, по формулі інтегрування частинами:

$$\int(2x+1)e^{3x}dx=(2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2dx==\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C. $$

Приклад 7. Знайти $\int\ln xdx$.

 Нехай $\left[\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ d\upsilon=dx \Rightarrow \upsilon=x \end{array}\right]$. Тому

$\int\ln xdx=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln x-x+C.$

Приклад 8. Знайти $\int x^2e^xdx$.

 Нехай $\left[\begin{array}{l} u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \\ d\upsilon=e^xdx \Rightarrow \upsilon=e^x \end{array}\right]$. Тому

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int e^x\cdot xdx. \qquad (2.2)$$

Для обчислення інтеграла $\int e^xxdx$ знову застосуємо метод інтегрування частинами: $u=x, d\upsilon=e^xdx \Rightarrow du=dx, \upsilon=e^x$. Значить

$$\int e^x\cdot xdx=x\cdot e^x-\int e^xdx=x\cdot e^x-e^x+C. \qquad (2.3)$$

Тому (див. (2.2)) $\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\left(x\cdot e^x-e^x+C\right).$

Приклад 9. Знайти $\int arctgxdx$.

 Нехай $\left[\begin{array}{l} u=arctgx \Rightarrow d\upsilon=\frac{1}{1+x^2}dx \\ d\upsilon=dx \Rightarrow \upsilon=x \end{array}\right]$. Тому

$$\int arctgxdx=x\cdot arctgx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}==xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Самостійна робота № 16

Тема: Наближене обчислення визначеного інтеграла за формулами трапеції і Сімпсона
Мета: набуття навиків наближеного обчислення визначеного інтеграла

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Наближене обчислення визначеного інтеграла за формулами трапеції і Сімпсона

Практичні завдання:
Обчислити визначені інтеграли за формулами трапеції і Сімпсона

1) $\int_0^{10}(3x^2+2x+2)dx$, n=10

2) $\int_0^{8}(3x^2-4x+1)dx$, n=8

3) $\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2}$, n=10

Література:

Афанасьєва О.М. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей).-К.: Вища школа, 2001.-С.322-324.
Богомолов Н.В. Практические заняття по математике: Учебное пособие для техникумов.-М.: Высш. Школа, 1983.-С.199-200.

Питання для самоконтролю:
1 Формула прямокутників.
2 Формула трапеції.
3 Формула Сімпсона.

Теоретичні відомості

Тема: : Наближене обчислення визначеного інтеграла за формулами трапеції і Сімпсона

Формула прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n),$$

.

Формула трапеції

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Формула Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})],$$

Наприклад, обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ за формулою Сімпсона, якщо n=2, тоді 2n=4

$x_0 = 0$

$x_1 = 0.25$

$x_2 = 0.5$

$x_3 = 0.75$

$x_4 = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}(1 + \frac{1}{2} + 4(\frac{16}{17} + \frac{16}{25}) + 2\frac{4}{5}) \approx 0.78539$$

Самостійна робота № 17

Тема: Обчислення довжини дуги кривої
Мета: формувати вміння та навики обчислювати довжину дуги кривої застосовуючи визначений інтеграл

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Обчислення довжини дуги кривої.

Практичні завдання:
Обчислити:
1) Довжину дуги параболи $y=x^2+2$ між точками O(0;0) і A(2;6).
2) Довжину дуги кривої $y^2=(x-1)^3$ між точками A(2;-1) і B(5;-8).

Література:
Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 299-300.

Питання для самоконтролю:
1 Дати визначення довжини дуги кривої.
2 Записати формулу для обчислення довжини дуги кривої.
3 Навести приклади обчислення довжини дуги кривої.

Теоретичні відомості

Довжина дуги кривої

Нехай у прямокутних координатах на площині задано криву рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$ функції.

Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 2.12).

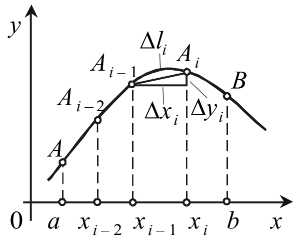


Рис. 2.12

Нагадаємо означення довжини дуги кривої.

Візьмемо на дузі AB точки $A, A_1, A_2, \ldots, B$ з абсцисами $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ і проведемо хорди $AA_1,\ A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots \Delta l_n$. Тоді дістанемо ламану $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$, вписану в другу AB. Довжина ламаної дорівнює $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Означення.* Довжиною *l* дуги *AB називається границя, до якої прямує довжина вписаної в цю дугу ламаної, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля:

$$l = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i. \qquad (1)$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2)$$

● Доведемо формулу (2). Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i .$$

За теоремою Лагранжа про середнє значення маємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i .$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i .$$

Таким чином, довжина вписаної в дугу ламаної набирає вигляду:

$$l_n = \sum_{i-1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i .$$

За умовою $f'(x)$ — неперервна, тому функція $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ також неперервна. Отже, існує границя інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу:

$$l=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i =$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

[illegible]: Обчислити довжину півкубічної параболи $y=(x+1)^{3/2}$, $-1\le x\le 4$.

● За формулою (2) маємо:

$$l=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{4}\sqrt{9x+13}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(9x+13)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{1}{27}(9\cdot 4+13)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{27}(-9+13)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}\cdot(49)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{27}(4)^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot 7^3-\frac{1}{27}\cdot 8=\frac{343}{27}-\frac{8}{27}=\frac{335}{27}.$$

Самостійна робота № 18

Тема: Обчислення об'ємів тіл обертання
Мета: формувати вміння та навики обчислювати об′єми тіл обертання застосовуючи визначений інтеграл

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Обчислення об'ємів тіл обертання.

Практичні завдання:
1 Знайти об′єм тіла, яке утворилось обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y^2=4x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$.
2 Знайти об′єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y=2$ і $y=x^2+1$.

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 295-298.

Питання для самоконтролю:
1. Записати формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.
2. Навести приклади обчислення об'ємів тіл обертання.

Теоретичні відомості

Об’єм тіла обертання

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі x криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю x і прямими $x = a$, $x = b$.

У цьому разі довільний переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є коло, площа якого $Q = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$.

Застосовуючи (40), дістаємо формулу для обчислення об’єму тіла обертання:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (1)$$

Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням лінії

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

навколо осі Ox на проміжку від 0 до b (рис. 2.15).

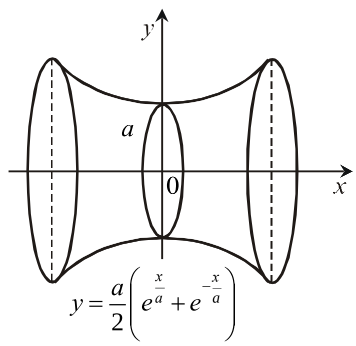


Рис. 2.15

● За формулою (1) маємо:

$$V = \pi\frac{a^2}{4}\int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\int_0^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) dx = \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b =$$

$$= \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2} = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

Самостійна робота № 19

Тема: Обчислення площі поверхні обертання
Мета: формувати вміння та навики обчислювати площі поверхні тіл обертання застосовуючи визначений інтеграл

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Обчислення площі поверхні обертання.

Практичні завдання:
1 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кубічної параболи $y=x^3$, обмеженої точками O(0;0) і A(2/3;8/27).
2 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y^2=2x$, обмеженої точками O(0;0) і A(1,5; $\sqrt{3}$).

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул ГД. Математика для техникумов. Наука, 1990, с 301-302.

Питання для самоконтролю:

1. Дати визначення площі поверхні обертання.
2. Записати формулу для обчислення площі поверхні обертання.
3. Навести приклади обчислення площі поверхні обертання.

Теоретичні відомості

Площа поверхні тіла обертання

Нехай задано поверхню, утворену обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі x. Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $a \le x \le b$. Функції $f(x)$, $f'(x)$ неперервні, якщо $x \in [a; b]$.

Проведемо хорди AM_1, M_1M_2, …, $M_{n\text{-}1}B$, довжини яких позначимо Δl_1, l_2, …, Δl_n (рис. 2.16).

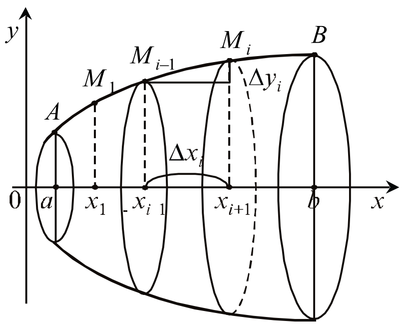


Рис. 2.16

Кожна хорда завдовжки $\Delta l_i \, (i = 1,2,\dots,n)$ під час обертання описує зрізаний конус, площа поверхні якого така:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i .$$

Але $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)} \Delta x_i .$

Застосовуючи теорему Лагранжа, маємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i).$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i ,$$

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i .$$

Площа поверхні, описаної ламаною, подається у вигляді $S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i ,$

або

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i . \qquad (42)$$

Означення. Границя суми (42), коли найбільша ланка ламаної Δl_i прямує до нуля, називається **площею поверхні обертання**.

Сума (42) за своєю побудовою не є інтегральною сумою для функції

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} . \qquad (43)$$

Але можна довести, що границя суми (42) дорівнює границі інтегральної суми для функції (43):

$$S_{\text{поверхні}} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i = $$
$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i \,,$$

або

$$S_{\text{поверхні}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (44)$$

[redacted] Визначити площу поверхні параболоїда, утвореного обертанням навколо осі x дуги параболи $y^2 = 2px$, $0 \le x \le a$.

$$f(x) = \sqrt{2px}, \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}.$$

Самостійна робота № 20

Тема: Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними
Мета: формувати вміння та навики розв′язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.

Практичні завдання:

1. Знайти загальний розв’язок дифрівнянь:

а) $2yy'=1-3x^2$
б) $(1+y)dx-(1-x)dy=0$
в) $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)by$

2. Знайти частинні розв′язки дифрівнянь:

а) $2yy'=1-3x^2$, якщо $y(1)=3$
б) $x^2dx+ydy=0$, якщо $y(0)=1$
в) $(1+x)ydx=(1-y)xdy$, якщо $y(1)=1$

Література:

Валуце І.І., Ділігул Г.Д. Математика для технікумів.-М. :Наука 1990, с 321-327.

Питання для самоконтролю:
1 Дати визначення диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.
2 Приклади розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.

Теоретичні відомості

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y). \qquad (7)$$

де $y(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)\, f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\,dx-(y + yx^2)\,dy = 0.$$

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1+ y^2)dx-y(1+x^2)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1 + x^2)\,(1 + y^2)\neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{y}{1+y^2}dy=0 \text{ або } \frac{2xdx}{1+x^2}=\frac{2ydy}{1+y^2}$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$\ln(l+x^2) = \ln(l + y^2) + \ln|C|$, $C\neq O$. Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}=C,\quad C\neq 0$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2y)\,dy = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x + 1)dx + x^2(1 — y)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2y^2 \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{y+1}{y^2}dy=C,\quad C\in R,$$

або

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

звідки

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Самостійна робота № 21

Тема: Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів: Даламбера та Коші
Мета: формувати вміння та навики досліджувати ряди на збіжність за ознакою Даламбера та Коші

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1. Ознака Даламбера збіжності знакододатніх рядів.
2. Ознака Коші збіжності знакододатніх рядів.

Практичні завдання:

Дослідити ряди на збіжність:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n} \right)^n$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)$

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. **М.:** Наука, 1990, с 410-414.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулювати ознаку Даламбера збіжності знакододатніх рядів.
2. Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Даламбера.
3. Сформулювати ознаку Коші збіжності знакододатніх рядів Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Коші.

Теоретичні відомості

Т е о р е м а. Ознака Коші збіжності числового ряду.

Нехай для будь-якого n≥1 і a_n≥0 ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$,

Тоді:
1) якщо p<1, то ряд (1) - збіжний;
2) якщо p>1, то ряд (1) - розбіжний;
3) якщо p=1, то ряд треба досліджувати додатково.
Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) – розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{n+1}\right)^n$

$a_n=\left(\frac{4n}{n+1}\right)^n$, p=$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{n+1}\right) = 4 > 1$, ряд розбіжний

Т е о р е м а. Даламбера збіжності числового ряду.

Нехай для будь-якого n≥1 і a_n≥0 ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), існує $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$=p

Тоді:
1) якщо p<1, то ряд (1) - збіжний;
2) якщо p>1, то ряд (1) - розбіжний;
3).якщо p=1, то ряд треба досліджувати додатково.
Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) – розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n = \frac{2^n}{n!} > 0$. Побудуємо $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \quad = \frac{2\cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ збігається.

Самостійна робота № 22

Тема: Дослідження рядів на збіжність
Мета: формувати вміння та навики досліджувати ряди на збіжність за ознакою порівнянь, за необхідною умовою збіжності числових рядів

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:

1 Дослідження рядів на збіжність за необхідною умовою збіжності числових рядів.
2 Дослідження рядів на збіжність за ознакою порівнянь.
3 Дослідження рядів на збіжність за ознакою Даламбера.
4 Дослідження рядів на збіжність за ознакою Коші.

Практичні завдання:
Дослідити ряди на збіжність:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Література:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.: Наука, 1990, с 410-414.

Питання для самоконтролю:

1 Сформулювати необхідну умову збіжності числових рядів.
2 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за допомогою необхідної умови збіжності числових рядів.
3 Сформулювати ознаку порявнянь.
4 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою порівнянь.
5 Сформулювати ознаку Даламбера збіжності знакододатніх рядів.
6 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Даламбера.
7 Сформулювати ознаку Коші збіжності знакододатніх рядів.
8 Навести приклади дослідження знакододатніх рідів на збіжність за ознакою Коші.

Теоретичні відомості

Тема: Дослідження рядів на збіжність

Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Розглянемо ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty}=u_n$ з додатними членами $u_n>0,\ u_2>0,\ldots,\ \ u_n>0,\ldots$. Частинні суми ряду (9.2) утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$.

Теорема 1 (основна). **Для того щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.**

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами розбігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Теорема. 2 (ознака порівняння рядів). **Якщо для рядів з додатними членами:**

$$\boldsymbol{u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n}, \qquad (9.6)$$

$$\boldsymbol{v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n} \qquad (9.7)$$

виконується умова $\boldsymbol{v_n\ge u_n}$, то:

а) із збіжності ряду (9.7) випливає збіжність ряду (9.6);

б) із розбіжності ряду (9.6) випливає розбіжність ряду (9.7).

Означення. Якщо для рядів (9.6), (9.7) виконується умова $u_n\le v_n$, то ряд (9.7) називається *мажорантним* відносно ряду (9.6), а ряд (9.6) — *мінорантним* відносно ряду (9.7).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n!}>0$. Зауважимо, що

$$\left(n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\ge1\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{n-1}=2^{n-1}\right)\Rightarrow\left(u_n=\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}=v_n\right).$$

Ряд порівняння $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q=0{,}5<1$. Значить, за ознакою порівняння (теорема 9.7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ — збігається.

Теорема 3. (ознака порівняння в граничній формі). **Якщо для рядів з додатними членами (9.6), (9.7) існує границя $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c\quad(0<c<+\infty)}$, то ряди (9.6) і (9.7) збігаються або розбігаються разом.**

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$.

● Загальний член ряду $u_n=\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$ являє собою алгебраїчний вираз. Для того щоб цілеспрямовано вибрати ряд по-
рівняння, побудуємо величину, еквівалентну u_n при $n\to\infty$ $u_n=\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}\sim\sqrt{\frac{n}{n^3}}=\frac{1}{n}=v_n$. Вибираємо ряд порівняння $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, він є розбіжним. Обчислюємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{10}{n^2}+\dfrac{20}{n^3}}}=1 \quad (0<1<+\infty).$$

За ознакою порівняння (теорема 9.8) буде розбіжним і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

Теорема 4. (ознака Даламбера). **Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, тоді:**

при $l<1$ ряд збігається;
при $l>1$ ряд розбігається;
при $l=1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n=\frac{2^n}{n!}>0$. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}= \quad =\frac{2\cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ збігається.

Теорема 5. (ознака Коші (радикальна)). **Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, тоді:**

при $l<1$ ряд збігається;
при $l>1$ ряд розбігається;
при $l=1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

● Загальний член ряду $u_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\dfrac{1}{n}}\right)^2=\frac{1}{9}<1.$$

Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд

порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії (9.6) або ряд Діріхле (9.8).

4. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.

5. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}=\frac{1^3}{e}+\frac{2^3}{e^2}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots;\ \ u_n=\frac{n^3}{e^n}>0\Rightarrow$ ряд знакододатний.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix}n\sim x\\ n\to\infty\\ x\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'''}{(e^x)'''}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\cdot2\cdot1}{e^x}=0\Rightarrow$

необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

3) Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\ \frac{1}{e}<1\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ за ознакою Даламбера збігається.

Самостійна робота № 23

Тема: Умовна імовірність. Формула повної імовірності. Формула Бернуллі
Мета: ознайомити з умовною ймовірністю, формувати навики оцінювання ймовірності подій з урахуванням додаткових умов; ознайомити з незалежними випробуваннями, схемою Бернулі, формувати уміння обчислювати ймовірності, застосовуючи формулу Бернулі.

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Незалежні і залежні події, умовні ймовірності. Теореми про добуток подій.
2 Формула повної імовірності. Формула Байєса.
3 Формули Бернуллі і Пуассона. Повторення дослідів.

Практичні завдання:
1. В типографії є 4 типографські машини. Для кожної машини ймовірність того, що вона працює в даний момент, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює хоча б одна машина.
2. Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом доби не перевищує встановленої норми, дорівнює 0,75. Знайдіть ймовірність того, що в найближчі 6 діб витрати електроенергії впродовж 4 діб не перевищують норми.
3. В цеху 6 двигунів. Для кожного двигуна ймовірність того, що він у даний момент включений, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в даний момент: а) включено 4 двигуни; б) включені всі двигуни; в) виключені всі двигуни.

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990. с. 379-385.

Питання для самоконтролю:
1 Що таке незалежні події, умовна ймовірність?
2 Записати формулу повної ймовірності.
3 Пояснити формулу Бернулі.

Теоретичні відомості

Тема: Умовна імовірність. Формула повної імовірності. Формула Бернуллі

1. Незалежні і залежні події, умовні ймовірності. Теореми про добуток подій

Означення 1. Подія A називається ***незалежною (independent)*** від події B, якщо ймовірність появи подіїA не залежить від того, відбулась подія B чи не відбулась.

Теорема 1. Якщо випадкові події A і B незалежні, то імовірність суміщення подій A і B дорівнює добутку ймовірностей появи цих подій.

Означення 2. Подія A називається ***залежною*** **(*dependent)*** від події B, якщо ймовірність події Aзмінюється в залежності від того, відбулась подія B чи не відбулась.

Розглянемо два приклади:

I. Дослідом є кидання двох монет.

Розглядаються події:

A – поява герба на одній монеті;

B – поява герба на другій монеті.

В цьому випадку ймовірність події A не залежить від того, відбулась подія B чи не відбулась; подія A не залежить від події B.

II. Задача з так званої "схеми урн".

В урні дві білих кульки і одна червона. Дві особи виймають із урни по одній кульці.

Розглянемо події:

A – поява білої кульки у першої особи;

B - поява білої кульки у другої особи.

Імовірність події A до того, як відомо що-небудь про подію B, рівна $\frac{2}{3}$. Якщо стало відомо, що подія Bвідбулась, то імовірність події A стає рівною $\frac{1}{2}$, з чого робимо висновок, що подія A залежить від події B.

Означення 3. Ймовірність події A, обчислена при умові, що мала місце інша подія B, називається***умовною ймовірністю*** **(*conditional probability*)** події A і позначається $P_B(A)$.

Для другого прикладу маємо:

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P_B(A)=\frac{1}{2}$.

Умову незалежності події A від події B можна записати у вигляді:

$P_B(A)=P(A)$.

Теорема 2. Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої, яка обчислена при умові, що перша мала місце:

$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$.

Доведення. Нехай можливі виходи досліду зводяться до n випадків.

Нехай появі події A сприяють m випадків. Існують випадки, які сприяють і події A, і події B одночасно. Нехай число таких випадків l. Тоді

$P(AB)=\frac{l}{n}$; $P(A)=\frac{m}{n}$.

Якщо відомо, що *A* відбулась, то m можливих випадків, при яких відбувається *A* і з них *l* сприяють події*B*, а значить $P_A(B)=\frac{l}{m}$.

Тоді одержимо :

$$\frac{l}{n}=P(AB)=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{l}{n},$$

що й потрібно було довести.

Теорему можна записати так: $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)$.

Якщо ж *A* не залежить від *B*, то $P(A)=P_B(A)$ і $P(B)=P_A(B)$ і одержимо результат теореми 1: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Приклад. На конвеєрі проходить 10 валиків, з них 5 конусних (*conical*), 7 еліптичних (*elliptic*). Робітник бере один валик, потім другий. Знайти ймовірність того, що перший з узятих валиків – конусний, а другий – еліптичний.

Розв’язання.

Імовірність того, що перший валик конусний $P(A)=\frac{3}{10}$. Імовірність того, що другий валик еліптичний(подія В), при умові, що перший конусний, є умовною імовірністю.

$$P_A(B)=\frac{7}{9};\ P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

Або навпаки

$$P(B)=\frac{7}{10};\ P_A(B)=\frac{3}{9};\ P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}.$$

Ймовірність добутку декількох подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cdot A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}}(A_n)$$

Ймовірність кожної наступної за порядком події обчислюється при умові, що всі попередні мали місце.

2. Формула повної імовірності. Формула Байєса

Нехай подія *A* може відбутись тільки разом з однією із попарно несумісних подій $H_1,\ H_2,\ H_3,$ …, H_n, які називаються *гіпотезами (hypothesis)* і утворюють повну групу $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$. Тоді, якщо відбулась подія*A*, то це означає, що відбулась одна із попарно несумісних подій $H_1A, H_2A,\ldots,H_nA$. Це означає: $A=H_1\cdot A+H_2\cdot A+\ldots+H_n\cdot A$. Використавши теорему додавання, одержимо:

$P(A) = P(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + ... + H_n \cdot A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + ... + P(H_n \cdot A)$.

З теореми множення ймовірностей $P(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$, i =1, 2, 3, …, *n*.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A) \quad (1.1)$$

Одержана формула (1.1) називається *формулою повної імовірності.*

Після цього нас цікавить питання про те, як зміняться ймовірності гіпотез H_i, *i*= 1, 2…, *n*, якщо подія *A*відбулась. Тобто, як обчислити $P_A(H_i)$. Справедливі рівності: $P(H_i A) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$, звідки

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad (1.2)$$

Ця формула називається формулою Байєса.

Приклад. В магазин надійшли електричні лампи одного типу, виготовлені на чотирьох лампових заводах: із першого заводу – 250 штук, із другого – 525 штук, із третього – 275 штук, із четвертого – 950 штук. Імовірність того, що лампочка буде горіти більше 1500 годин, для першого заводу становить 0,15, для другого – 0,30; для третього – 0,20; для четвертого – 0,10. При розкладанні по полицях магазину лампи були перемішані. Яка ймовірність того, що куплена лампа прогорить більше 1500 годин? Якому заводу найбільш ймовірно вона належить?

Розв’язання.

Нехай *A* – подія, яка полягає в тому, що вибрана лампа буде горіти більше 1500 годин, а H_1, H_2, H_3, H_4 - гіпотези, що лампа виготовлена відповідно 1, 2, 3, 4 заводом. Ламп 2000 і відповідні ймовірності рівні:

$P(H_1) = \frac{250}{2000} = 0{,}125$; $P(H_2) = \frac{525}{2000} = 0{,}2625$;

$P(H_3) = \frac{275}{2000} = 0{,}1375$; $P(H_4) = \frac{950}{2000} = 0{,}475$;

$\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1$.

Далі з умови задачі випливає, що $P_{H_1}(A) = 0{,}15$; $P_{H_2}(A) = 0{,}30$; $P_{H_3}(A) = 20$; $P_{H_4}(A) = 0{,}45$. Тоді за формулою повної імовірності маємо:

$P(A) = 0{,}125 \cdot 0{,}15 + 0{,}2625 \cdot 0{,}30 + 0{,}1375 \cdot 0{,}20 + 0{,}475 \cdot 0{,}1 = 0{,}1725$.

За формулою Байєса:

$P_A(H_1) = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}15}{0{,}1725} = \frac{0{,}01875}{0{,}1725} = 0{,}1087$;

$P_A(H_2) = \frac{0{,}2625 \cdot 0{,}30}{0{,}1725} = 0{,}4565$;

$$P_A(H_3) = \frac{0{,}1375 \cdot 0{,}20}{0{,}1725} = 0{,}1594$$;

$$P_A(H_4) = \frac{0{,}475 \cdot 0{,}1}{0{,}1725} = \frac{0{,}0475}{0{,}1725} = 0{,}27553$$;

P(A)= 1- *p* = *q*.

Отже, найбільш імовірно, що вибрана лампа, яка прогорить більше 1500 годин, належить другому заводу.

3. Формули Бернуллі і Пуассона. Повторення дослідів

Нехай проводиться *n* незалежних випробувань, в результаті кожного з яких може відбутись або не відбутись деяка подія *A*. Нехай в кожному випробуванні ймовірність появи *A* рівна *P(A)=p* і ймовірність протилежної події рівна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Визначимо ймовірність $P_n(m)$ того, що подія *A* відбудеться *m* раз в *n* випробуваннях. При цьому побачимо, що появи або непояви події *A* можуть чергуватись довільним способом. Умовимося записувати можливі результати випробувань у вигляді комбінації букв *A* і $\overline{A}$. Наприклад, запис $A\overline{A}\overline{A}A$ означає, що в чотирьох випробуваннях подія *A* відбулась в 1-му і 4-му випадках і не відбулась в 2-му і 3-му випадках.

Кожну комбінацію, в яку *A* входить *m* раз і $\overline{A}$ входить *n-m* раз, назвемо сприятливою. Кількість сприятливих комбінацій дорівнює кількості *k* способів, якими можна вибирати *m* елементів із даних *n*; таким чином вона рівна числу сполучень із *n* елементів по *m*; тобто $k = C_n^m$.

Обчислимо ймовірності сприятливих комбінацій. Розглянемо спочатку випадок коли подія *A*відбувається в перших *m* іспитах і значить не відбувається в інших *n-m* іспитах. Така сприятлива комбінація має вигляд: $\underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{m} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot ... \cdot \overline{A}}_{n-m}$. Ймовірність цієї комбінації на основі теореми множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює:

$$P(B_1) = \underbrace{P(A)P(A)...P(A)}_{m}\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})...P(\overline{A})}_{n-m} = p^m q^{n-m}$$.

В іншій сприятливій комбінації B_i подія *A* зустрічається *m* раз, а подія $\overline{A}$ відбувається *n-m* раз, тільки в іншому порядку, ймовірність кожної з таких комбінацій також рівна $p^m q^{n-m}$.

$$P(B_1) = P(B_2) = ... = P(B_k) = p^m q^{n-m}$$.

Всі сприятливі комбінації є несумісними. На основі теореми додавання несумісних подій:

$$P_n(m) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}$$;

або

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}.$$

Одержана формула є **формулою Бернуллі.**

Формула Бернуллі при різних *m* утворює суму:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + C_n^m (1-p)^{n-m} + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0 = 1.$$

Члени суми збігаються з членами розкладу бінома Ньютона.

$$(p+q)^n = q^n + C^{\frac{1}{n}} p\cdot q^{n-1} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + p^n = 1.$$

Сума всіх можливих ймовірностей дорівнює 1, тому що $p+q=1$, а $(p+q)^n = 1^n = 1$. Сукупність імовірностей називається ще біноміальним розкладом ймовірностей.

Зауваження. При дослідженні багатьох питань потрібно обчислити ймовірність того, що подія А відбудеться “хоча б один раз”. Ця ймовірність визначиться з рівності: $P_n(m\ge 1) = 1 - P_n(m=0) = 1 - q^n$.

Імовірність того, що подія відбудеться не менше, ніж *k* раз, визначиться за формулою: $P(m\ge k)=\sum\limits_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$ або

$$P(m\ge k)=1-\sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Відмічене співвідношення (*ratio*) дає можливість ввести для обчислення ймовірності можливого числа події *A* в серії із *n* незалежних випробувань так звану ***твірну функцію*** (**produced function)**:

$$\psi_n(x) = (q+px)^n = q^n x^0 + C_n^1 p q^{n-1x} x + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} x^m + \ldots + p^n x^n.$$

Ця функція має таку властивість: коефіцієнт при x^m в записаному розкладі дорівнює ймовірності події *A*з’явитись рівно *m* раз в серії з *n* незалежних випробувань, які проводяться в змінних умовах. Так, наприклад, якщо ймовірність появи події в *i*-му випробуванні $P(A_i)=p_i$, а ймовірність непояви $P(\overline{A}_i)=1-p_i=q_i$, то ймовірність появи *A* в *n* випробуваннях рівно *m* раз дорівнює коефіцієнту при x^m в розкладі за степенями *x*твірної функції:

$$\Psi_n(x) = (q_1+p_1x)(q_2+p_2x)\cdot\ldots\cdot(q_n+p_nx).$$

Приклад. Чотири лучники незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для першого стрілка рівна 0,8; для другого – 0,7; для третього – 0,6; для четвертого – 0,5. Знайти ймовірність того, що в мішені буде рівно дві пробоїни.

Розв’язання.

Ймовірності попадання для стрілків різні, тобто для розв’язування задачі використаємо твірну функцію. Згідно з умовою, твірна функція для даного прикладу має вигляд:

$$\Psi(x) = (0,2+0,8x)(0,3+0,7x)(0,4+0,6x)(0,5+0,5x) =$$
$$= 0,012 + 0,106x + 0,32x^2 + 0,394x^3 + 0,168x^4.$$

Коефіцієнт при x^2 є шуканою ймовірністю, тобто $P_4(2) = 0,32$.

Самостійна робота № 24

Тема: Числові характеристики вибірки
Мета: формувати навички і вміння оперувати величинами математичної статистики

Питання, що виносяться на самостійне вивчення:
1 Вибіркова середня величина вибірки.
2 Мода.
3 Медіана.
4 Розмах.
5 Дисперсія вибірки.
6 Середнє квадратичне відхилення вибірки.
7 Коефіцієнт варіації.

Практичні завдання:
1 За табличкою статистичного розподілу частот вибірки знайти статистичний розподіл відносних частот.

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

2 Побудувати полігон частот за заданим розподілом вибірки

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990. с 528-532.

Питання для самоконтролю:
1 Що таке математична статистика?
2 Назвати і охарактеризувати числові характеристики вибірки.

Теоретичні відомості

Тема: Числові характеристики вибірки

1.4 Числові характеристики вибірки

Побудувавши статистичний розподіл вибірки і зобразивши його графічно, можна одержати первісне уявлення про закономірності, які мають місце у ряду спостережень. Але на практиці часто цього не достатньо. Така ситуація виникає, коли необхідно уточнити ті або інші відомості про ряд розподілу, або коли виникає необхідність порівняти два ряди і більше. При цьому необхідно порівняти однотипні варіаційні ряди, тобто ряди, які одержані при обробці зрівнювальних статистичних даних. Зрівнювальні розподіли можуть суттєво відрізнятися одне від одного. Тому для подальшого вивчення зміни значень випадкової величини використовують числові характеристики варіаційних рядів, які зображають деякі сталі величини, які подають варіаційний ряд в цілому і відображають властивості, сукупності закономірностей, що вивчаються. До таких числових характеристик відносяться середня величина ряду розподілу, величини, які відображають варіацію змін – розмах, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та інші.

1 Вибіркова середня величина $\overline{x}_в$ вибірки. Дана величина визначається формулами:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} \text{ (для упорядкованої вибірки) або } \overline{x}_в = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i, \qquad (1.4)$$

де x_i – значення i-ої варіанти, n_i – частота i-ої варіанти, n – об’єм вибірки, k –

кількість варіант у вибірках, w_i – відносна частота i-ї варіанти. Для інтервального варіаційного ряду x_i є серединою інтервалів варіаційного ряду.

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ (для невпорядкованої вибірки).} \qquad (1.5)$$

Статистичний зміст середньої величини заключається у тому, що навколо неї концентруються інші результати спостережень.

2 Відхил варіант визначають формулою

$$(x_i - \overline{x_в})n_i,\ i = \overline{1,k}. \qquad (1.6)$$

При цьому очевидно, що $\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})n_i = 0$.

3 Модою Mo^* вибірки варіант називається варіанта, якій відповідає найбільша частота. Якщо варіаційний ряд має одну таку частоту, то ряд називається одномодальним, дві – двомодальним і т.д. Для визначення моди інтервального статистичного розподілу необхідно знайти такий частинний інтервал, що має найбільшу частоту появи.

Мода обчислюється за формулою

$$Mo^* = x_{i-1} + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} h, \qquad (1.7)$$

де x_{i-1} – початок модального інтервалу; h – довжина часткового інтервалу; n_{Mo} – частота модального інтервалу; n_{Mo-1} – частота домодального інтервалу; n_{Mo+1} – частота післямодального інтервалу.

4 Медіана Me^*. Медіаною дискретного статистичного розподілу називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві рівні частини за кількістю варіант. Для визначення медіани інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити медіанний частковий інтервал. Якщо, наприклад, на i-му інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ $F^*(x_{i-1}) < 0{,}5$ і $F^*(x_i) > 0{,}5$, то беручи до уваги те, що досліджувана ознака X є неперервною і при цьому $F^*(x)$ є не спадною функцією, всередині інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$неодмінно існує таке значення $x = Me^*$, де $F^*(Me^*) = 0{,}5$. Медіана обчислюється за формулою

$$Me^* = x_{i-1} + \frac{0{,}5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} h, \qquad (1.8)$$

де $h = x_i - x_{i-1}$ – довжина інтервалу.

Приклад 6 За даними інтервального статистичного розподілу вибірки (табл. 11)

Таблиця 11

h=4	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
n_i	6	14	20	25	30	5

побудувати гістограму частот і $F^*(x)$. Визначити Mo*, Me*.

Розв'язання. Гістограму частот зобразимо на рис. 1.6.

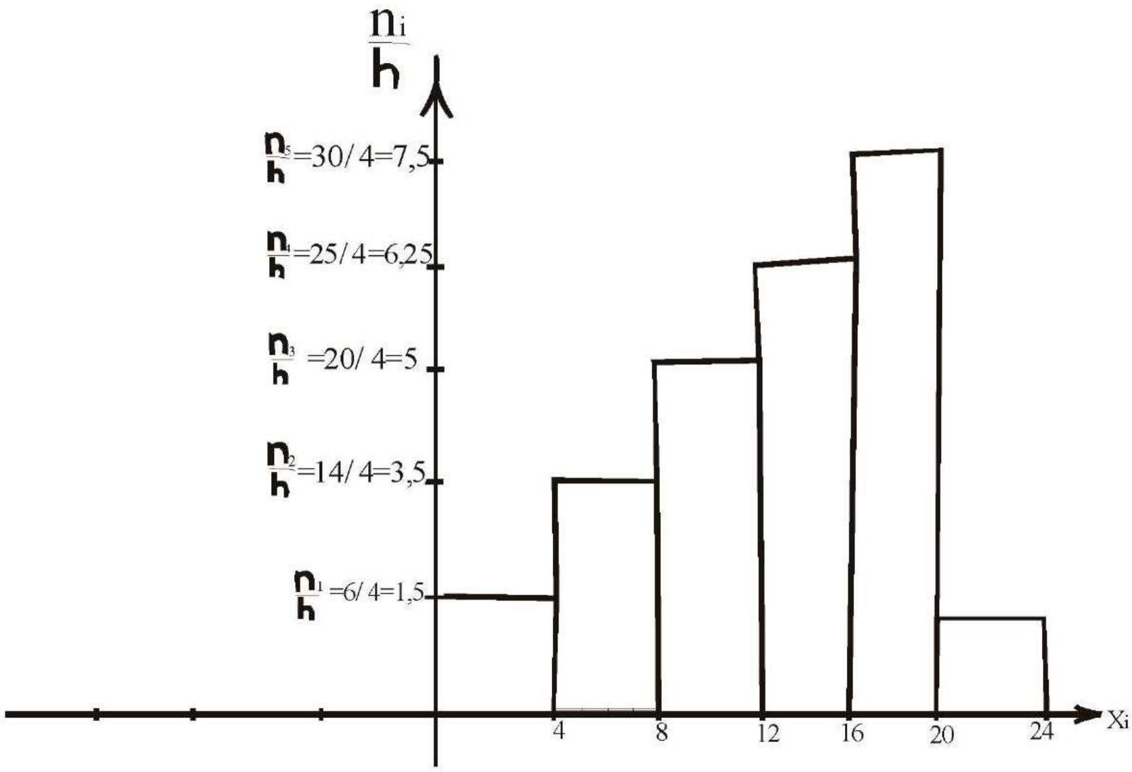


Рис.1.6

Побудуємо графік $F^*(x)$, для цього спочатку розрахуємо її значення на кожному з інтервалів, скориставшись формулою $F^*(x) = \dfrac{n_x^{нак}}{n}$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{6}{100} = 0,06, & 0 < x \le 4, \\ \dfrac{20}{100} = 0,2, & 4 < x \le 8, \\ \dfrac{40}{100} = 0,4, & 8 < x \le 12, \\ \dfrac{65}{100} = 0,65, & 12 < x \le 16, \\ \dfrac{95}{100} = 0,95, & 16 < x \le 20, \\ \dfrac{100}{100} = 1, & 20 < x \le 24. \end{cases}$$

Графік $F^*(x)$ зображено на рис.1.7.

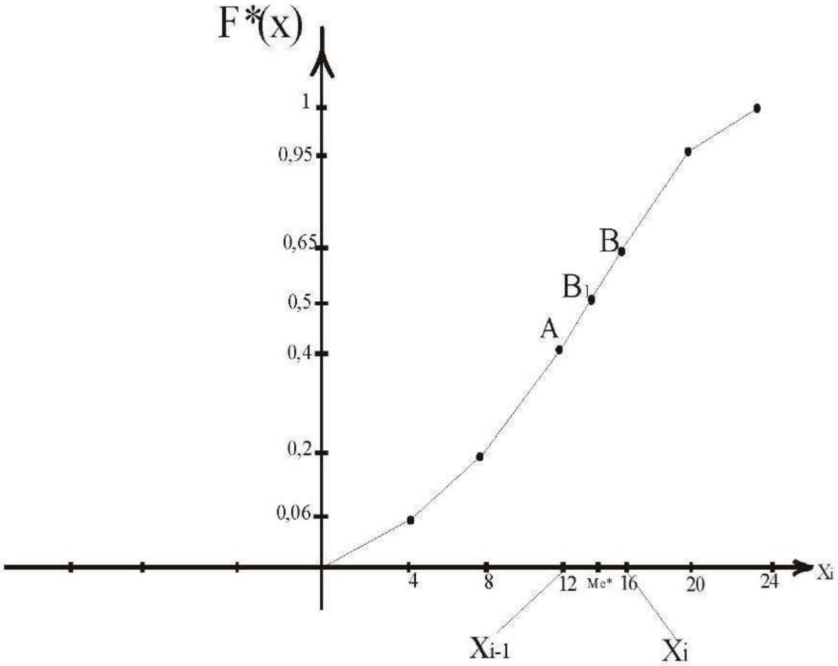


Рис.1.7

Використовуючи рис.1.7 і формулу (1.8), обчислимо значення Me^*:

$$x_{i-1} = 12,\ x_i = 16,\ h = x_i - x_{i-1} = 4,\ F^*(x_{i-1}) = 0{,}4,\ F^*(x_i) = 0{,}65,$$

$$Me^* = 12 + \frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}65 - 0{,}4} 4 = 13.$$

Відповідно до таблиці 11 найбільшу частоту має інтервал (16 – 20), значення якої дорівнює 30, тому за формулою (1.7) обчислимо моду Mo^* інтервального розподілу, використовуючи значення $x_{i-1} = 16$, $h = x_i - x_{i-1} = 4$,

$$h_{Mo} = 30,\ h_{Mo-1} = 25,\ h_{Mo+1} = 5.$$

$$Mo^* = x_{i-1} + \frac{h_{Mo} - h_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} h = 16 + \frac{30 - 25}{2 \cdot 30 - 25 - 5} \cdot 4 = 16{,}7.$$

Таким чином, для вихідного інтервального статистичного розподілу, заданого таблицею 11 медіана $Me^*=13{,}6$; $Mo^*=16{,}7$.

5 Розмах R.

Для грубого розходження варіант відносно середнього значення $\overline{x_в}$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою і найменшою варіантами варіаційного ряду $R = x_{\max} - x_{\min}$ (1.9)

6 Дисперсія вибірки.

Для більш точного оцінювання розходження варіант вибірки відносно $\overline{x_в}$ вибирається дисперсія.

Вибірковою дисперсією $D_в$ називається середній квадратичний відхил варіант від їх середньої арифметичної, яку можна обчислити за формулами.

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_в})^2}{n} \cdot n_i \text{ (для упорядкованої вибірки).} \quad (1.10)$$

n — ,

Таблиця 13

	1–1,2	1,2–1,4	1,4–1,6	1,6–1,8	1,8–2,0	2,0–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3,0	3,0–3,2
n_i	5	12	18	22	36	24	19	15	11		2

Розв'язання. Побудуємо дискретний статистичний розподіл (табл. 14) за заданим інтервальним з урахуванням того, що $h = 0{,}2$.

Таблиця 14

$x_i^* = x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_i - \frac{h}{2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1
n_i	5	12	18	22	36	24	19	15	11	9	2

Підрахуємо число варіант $n = 5 + 12 + 18 + 22 + 36 + 24 + 19 + 15 + 11 + 9 + 2 = 173$

За формулами (1.4), (1.12) і (1.13) обчислимо $\overline{x_в}$, $D_в$, $\sigma_в$.

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n} = \frac{1{,}1\cdot 5 + 1{,}3\cdot 12 + 1{,}5\cdot 18 + 1{,}7\cdot 22 + 1{,}9\cdot 36 + 2{,}1\cdot 24 + 2{,}3\cdot 19 + 2{,}5\cdot 15 + 2{,}7\cdot 11 + 2{,}8\cdot 9 + 3{,}1\cdot 2}{173} =$$

$$= \frac{347{,}5}{173} = 2{,}008671 \text{ кг.}$$

Отже, $\overline{x_в} \approx 2{,}009$ кг.

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x_в})^2 = \frac{(1{,}1)^2\cdot 5 + (1{,}5)^2\cdot 1{,}8 + (1{,}7)^2\cdot 22 + (1{,}9)^2\cdot 36}{173} +$$

$$+ \frac{(2{,}1)^2\cdot 24 + (2{,}3)^3\cdot 19 + (2{,}5)^2\cdot 15 + (2{,}7)^2\cdot 11 + (2{,}9)^2\cdot 9 + (3{,}1)^2\cdot 2}{173} - (2{,}009)^2 \approx 0{,}217.$$

$$D_в \approx 0{,}217, \quad \sigma_в = \sqrt{0{,}217} \approx 0{,}466.$$

Приклад 6. За даними інтервального статистичного розподілу вибірки, в якому наведено розподіл маси новонароджених x_i (табл. 13), обчислити $\overline{x_в}$, $D_в$, $\sigma_в$.