Міністерство освіти і науки України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
__________С.В.Бондаренко
_____ ___________2013 р.

Методичне забезпечення
практичних занять з дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
для студентів 2 курсу
спеціальності:

5.05070104 «Монтаж і експлуатація електроустаткування підприємств і цивільних споруд»

Уклав Кур′ян О.В.

Розглянуто на засіданні
циклової комісії
природничо-наукової підготовки
Протокол №__ від __ _________ 2013 року
Голова циклової комісії /А.М.Савчук/

Практичне заняття № 1

Тема: Дії над комплексними числами в різних формах
Мета: повторити та закріпити дії над комплексними числами в різних формах. Виховувати вміння індивідуальної роботи
Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв′язування практичних завдань.

Студенти повинні знати: основні форми комплексних чисел, дії над комплексними числами
Студенти повинні уміти: застосовувати основні поняття і формули для дій над комплексними числами в різних формах

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990. с. 88-92, 98, 103-113.

Теоретичні відомості:

Тема: Дії над комплексними числами в різних формах

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Розглянемо трикутник *OAM* і запишемо такі співвідношення між його сторонами:

$\frac{a}{r}=\cos\varphi$; $\frac{b}{r}=\sin\varphi$.

Звідси $z=a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$, тобто маємо:

$$\boxed{\begin{gathered} r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|; \\ z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi); \\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\ a\neq 0. \end{gathered}} \qquad (2)$$

Подання комплексного числа у вигляді (2) називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Записати комплексне число 1 + *i* у тригонометричній формі (рис. 1.15).

• Згідно з (2) маємо:

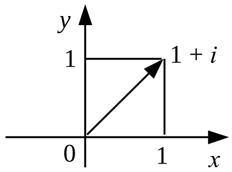


Рис. 1.15

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).\bullet$$

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для інших алгебраїчних дій зручніша тригонометрична форма.

Наприклад, добуток двох чисел $z_1=r_1(\cos y_1+i\sin y_1)$ і $z_2=r_2(\cos y_2+i\sin y_2)$ подається так:

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(y_1+y_2+i\sin(y_1+y_2))].$$

ПІДНЕСЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА ДО СТЕПЕНЯ

Степенем *p* комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ є число $z^p=r^p(\cos p\,\varphi+i\sin p\,\varphi)$, де *p* — будь-яке ціле число. Ця формула легко виводиться за означенням добутку комплексних чисел.

Знайти z^6, якщо $z=2(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$.

• $z^6=2^6\left(\cos 6\cdot 10^\circ+i\sin 6\cdot 10^\circ\right)=32\left(1+\sqrt{3}i\right)$. •

1. Якщо *p* = *n* (*n* — ціле число) і *r* = 1, дістаємо **формулу Муавра**:

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.} \qquad (3)$$

Якщо *p* — ірраціональне, то *p*-й степінь будь-якого числа має нескінченну множину значень.

Подати sin3φ та cos3φ через sinφ та cosφ.

• $\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi+3\cos^2\varphi\sin\varphi i-$

$$-3\cos\varphi\sin^2\varphi-\sin^3\varphi i=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\right)$$

Прирівнюючи відповідні абсциси та ординати, дістаємо:

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi;$$

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi. \bullet$$

2. Якщо $p = 1/n$, маємо:

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right], \quad k=0,1,2,\dots,n-1.} \qquad (4)$$

Знайти $z=\sqrt{i}$.

• За формулою (3) $r=\sqrt{0^2+1^2}=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Далі згідно з (4) (рис. 1.16):

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}z_1. \bullet$$

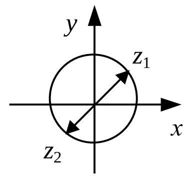


Рис. 1.16

ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Формула Ейлера: $\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.}$

Згідно з цією формулою комплексне число можна подати в ***показниковій формі***:

$$\boxed{z=re^{i\varphi}.} \qquad (5)$$

♦ Справді, нехай r — модуль комплексного числа $z = a + ib$, а φ — головний аргумент. Тоді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Беручи до уваги формулу Ейлера, дістаємо:

$$z=re^{i\varphi}. \ \blacklozenge$$

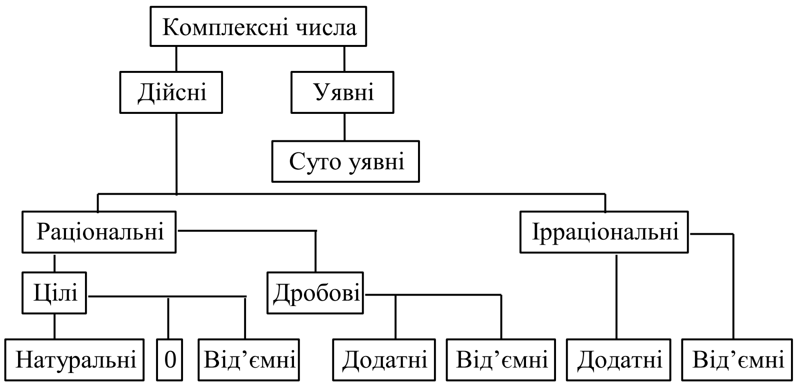
Властивості:

1) $e^{(2k\pi+\varphi)i}=e^{\varphi i}$;
• $e^{2k\pi i}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1\Rightarrow$
$e^{(2k\pi+\varphi i)}=e^{2k\pi i}e^{\varphi i}=e^{\varphi i}.\bullet$
2) $e^{2\pi i}=1$.

Обчислити дійсне значення i^i .

• $i^i=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i=e^{i^2\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}. \bullet$

ВИСНОВОК



Основні формули

$z = a + ib$ або

1) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $a \neq 0$;

2) $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$,

$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$;

3) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Практичне заняття 2

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Мета: вивчити метод розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Виховувати вміння індивідуальної роботи

Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Студенти повинні знати:

- методи обчислення визначників;
- формули Крамера.
-

Студенти повинні уміти:

- обчислювати визначники різними методами;
- розв'язувати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, робочі зошити

Література:

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001.-С. 6-12.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

(коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, і вільні члени b_1, b_2 і b_3 вважаються заданими).

Коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3 в системі (1) позначаються однією буквою a з двома індексами, де перший відповідає номеру рівняння, а другий – номеру невідомого.

Щоб розв’язати систему (1), із коефіцієнтів при невідомих і вільних складаються визначники третього порядку Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Визначник Δ, який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Визначники Δ_1, Δ_2, і Δ_3, утворюються з визначника (2) відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв’язуванні системи рівнянь (4) можуть бути такі три випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система (4) має єдиний розв’язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (3)$$

Формули (3) називають *формулами Крамера*.

1. Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 не дорівнює нулю, то система (4) розв’язків не має.

2. Якщо $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, то система (1) має безліч розв’язків.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

Розв’язування.

Знаходимо визначники Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами (3)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Розв’язати системи рівнянь:

1. $\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ &3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ &3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ &4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ &5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ &3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{aligned}$

Практичне заняття 3

Тема: Застосування добутків векторів

Мета: повторити та закріпити знаходження скалярного та векторного добутків векторів. Формувати вміння та навички застосовування добутків векторів при розв’язуванні задач. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховувати старанність, відповідальність.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Скалярний добуток векторів.
2 Векторний добуток векторів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Калькулятори, робочий зошит

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.- С. 54-65.

Теоретичні відомості:

Тема: Вектори. Лінійні дії над векторами. Скалярний та векторний добутки векторів.

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — дві точки у просторі, то відстань d між ними визначається так:

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

Додавання та віднімання векторів

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{a_x+b_x, a_y+b_y,\ a_z+b_z\}.}$$

Множення вектора на число

Для довільних чисел λ, μ та векторів **a**, **b** справджуються рівності:

$$\begin{aligned}&1)\ \lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})=(\mu\lambda)\mathbf{a};\\ &2)\ (\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}; \qquad (1)\\ &3)\ \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Останню рівність унаочнює рис. 3.16 ($\lambda>1$).

Поділ відрізка в заданому відношенні

Дано відрізок у тривимірному просторі, кінцями якого є точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Точка $M(x,\ y,\ z)$, узята на прямій, що проходить через точки M_1, M_2, поділяє даний відрізок у **відношенні** λ, якщо

$$\mathbf{M_1M}=\lambda\mathbf{MM_2}.$$

Спроектувавши цю векторну рівність на осі x, y, z, дістанемо рівняння

$$x-x_1=\lambda(x_2-x), y-y_1=\lambda(y_2-y),\ z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

Звідси знаходимо координати точки M:

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.}$$

Якщо $\lambda>0$, то M лежить між точками M_1 і M_2. У такому разі говорять, що точка M поділяє відрізок M_1M_2 внутрішнім чином. Якщо $\lambda<0$, то M не належить відрізку M_1M_2. Тоді говорять, що точка M поділяє відрізок M_1M_2 зовнішнім чином.

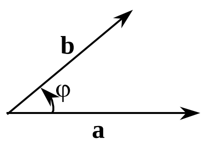
У частинному випадку, коли точка M є серединою відрізка M_1M_2, тобто при λ = 1, маємо координати середини відрізка M_1M_2:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ \ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ \ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Скалярний добуток векторів

Означення. **Скалярним добутком векторів a** і **b** називається число $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними (рис. 3.18):

$$\boxed{\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi.} \qquad (1)$$



$$\boxed{\begin{aligned}&1)\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a};\\ &2)\,\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b});\\ &3)\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2=|a|^2;\\ &4)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}}$$

Перемноживши скалярно вектори **a** та **b**, знайдемо їх скалярний добуток у проекціях на координатні осі:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.} \qquad (3)$$

Звідси маємо:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2, \quad |\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,.}$$

Знаючи проекції векторів **a**, **b**, можна знайти кут між цими векторами:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|a|\cdot|b|}, \quad \cos\varphi=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.}$$

Векторний добуток векторів

***Означення*. Векторним добутком векторів a та b** називається вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, який задовольняє такі умови:

1) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярний до векторів **a** і **b**;

2) довжина $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах **a** та **b**;

3) якщо звести вектори **a**, **b** та $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ до спільного початку, то спостерігач, який міститься в кінці вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, бачитиме найкоротший поворот від вектора **a** до вектора **b** таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 3.20).

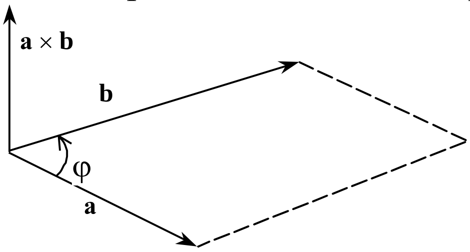


Рис. 3.20

З означення векторного добутку випливають такі його властивості

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}; \\ 2)\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\varphi; \\ 3)\ \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}); \\ 4)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}. \end{array}}$$

Векторний добуток векторів **a** та **b** можна подати у вигляді визначника:

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

1. Трикутник заданий вершинами A(0;-1;2), B(-1;-2;7), C(1;-2;6). Знайти його внутрішній кут при вершині A, медіану BK та площу трикутника.
2. Задано точки A(0;-1;2) і B(-1;1;4). Знайти координати та довжину вектора AB.

Практичне заняття 4

Тема: Розв'язування задач на пряму і площину.

Мета: Повторити та закріпити основні формули рівнянь прямих на площині і в просторі та рівнянь площин. Формувати вміння та навики застосування рівнянь прямих та площин при розв'язуванні задач.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв’язування вправ.

Студенти повинні знати:
- рівняння прямих на площині;
- рівняння площини;
- умови паралельності та перпендикулярності прямих та площин.

Студенти повинні уміти:
- складати рівняння прямих та площин;
- визначати кути між прямими та площинами, відстань від точки до прямої та площини.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, креслярські інструменти, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с. 119-144.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 76-88.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування задач на пряму і площину.

Види рівнянь на площині:

$y = kx + b$, де $k = \mathrm{tg}\varphi$. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$ рівняння прямої, що проходить через задану точку

$\boxed{\dfrac{y - y_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$ рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

Якщо задано вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді $\boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}.}$

$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,}$ рівняння прямої у відрізках на осях.

$\boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}}$ канонічне рівняння прямої.

$Ax + By + C = 0,$ загальне рівняння прямої.

Кут між прямими: $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$, $\boxed{\cos\theta = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.}$

Умова паралельності прямих $k_1 = k_2.$, $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

Умова перпендикулярності прямих $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Відстань від точки до прямої $\boxed{d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$

Загальне рівняння площини $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$ рівняння площини, що проходить через задану точку $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ перпендикулярно до заданого вектора $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

Відстань від точки до площини $\boxed{d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку (– 2, 1) і нахилена під кутом 30° до прямої $x - 2y = 3$.

2. Скласти рівняння прямої, що утворює кут 45° із прямою 3x + y – 2 = 0 та проходить через точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

3. На прямій 3x – 3y – 7 = 0 знайти точку, рівновіддалену від точок (3, – 4) і (7, 2).

4. Координати кінців однієї зі сторін квадрата: (–3, –3) і (5, 3). Знайти рівняння його сторін.

Практичне заняття 5

Тема: Розв'язування задач про криві другого порядку

Мета: Повторити та закріпити основні формули кривих другого порядку. Формувати вміння та навики застосування рівнянь прямих та площин при розв'язуванні задач.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв’язування вправ.

Студенти повинні знати:
- рівняння кривих другого порядку

Студенти повинні уміти:
- складати рівняння кривих другого порядку;
- обчислювати ексцентриситет еліпса та гіперболи.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
калькулятори, креслярські інструменти, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 145-171.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001. –С. 97-110.

Теоретичні відомості:

Тема: Розв'язування задач про криві другого порядку

Еліпс. *Означення.* Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

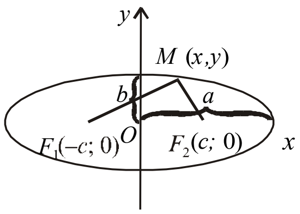


Рис. 2.16

На рис. 2.16 зображено F_1 $(-c,$ $0)$, F_2 $(c,$ $0)$ — фокуси еліпса, M $(x,$ $y)$ — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1|+|MF_2|=2a,$ причому $2c$ < < $2a$ $\Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.20)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2.20). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно $(a,$ $0)$; $(-a;$ $0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.20) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 2.16 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon=\frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon\in[0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2,$ то $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon=0\Rightarrow a=b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 2.17, з якого бачимо, що точки F_1 $(-c, 0)$ і F_2 $(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left||MF_1|-|MF_2|\right|=2a, a<c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

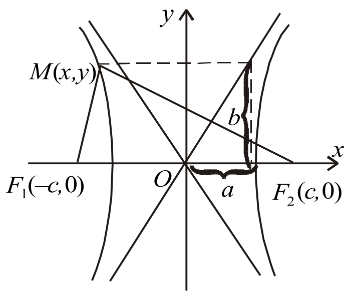


Рис. 2.17

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a,$ $0)$; $(a,$ $0)$ — точки перетину з віссю Ox. Розглянемо ще рівняння прямих $y=\pm\frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 2.17.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

Дві прямі, рівняння яких $x=-\frac{a}{\varepsilon}$; $x=\frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0\le\varepsilon<1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon}>a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: **якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стале й дорівнює ексцентриситету, тобто $\varepsilon=\frac{r}{d}$.**

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс, якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола, якщо* $\varepsilon > 1$.

Парабола. *Означення.* Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

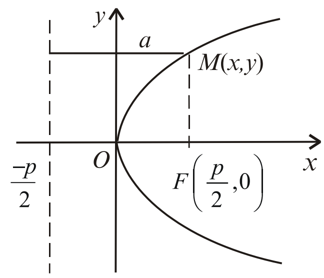


Рис. 2.18

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 2.18):

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2},\ \text{або}\ y^2=2px$$

— канонічне рівняння параболи, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 2.18.

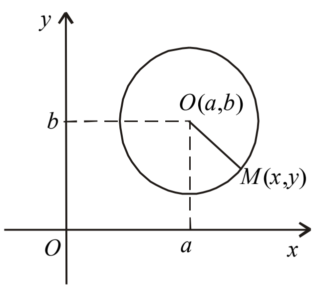


Рис. 2.19

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис. 2.19).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2.21)$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

1. Знайдемо координати фокуса параболи $y = x^2 - 2x.$

Беручи $y+1 = x_1,\ x-1 = y_1,$ дістанемо рівняння параболи виду (1) $y_1^2 = x_1.$

Оскільки $2p = 1,\ p = \frac{1}{2}$, то фокус F має координати $x_1 = \frac{1}{4},\ y_1 = 0$. Отже, знаходимо координати фокуса $x = 1,\ \ y = -\frac{3}{4}.$

2. Знайти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що $b = 3,\ \varepsilon = 0{,}8$.

Маємо рівняння $a^2 - b^2 = c^2,\ \frac{c}{a} = 0{,}8,\ b = 3,$ з яких визначаємо a = 5. Рівняння еліпса подається так: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$

3. Знайдемо ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Маємо: $a = 4,\ b = 3,\ c^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2,\ c = 5,\ \varepsilon = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

4. Дано рівняння директрис гіперболи $x = \pm 2$, відстані між фокусами якої дорівнюють 10. Записати канонічне рівняння гіперболи.

З рівностей $\frac{a^2}{c} = 2,\ c = 5$ знаходимо $a^2 = 10,\ b^2 = c^2 - a^2 = \ = 25 - 10 = 15$, а далі записуємо рівняння $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$.

Практичне заняття 6

Тема: Диференціювання функцій

Мета: Повторити та закріпити поняття похідної, механічний та геометричний зміст похідної, правила диференціювання. Формувати вміння та навики застосування правил диференціювання при знаходженні похідних функцій.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:
- означення похідної;
- механічний та геометричний зміст похідної;
- рівняння дотичної до графіка функції;
- правила диференціювання; таблицю похідних.
-

Студенти повинні уміти:
- знаходити похідні функцій;
- знаходити рівняння дотичної до графіка функції;
- знаходити швидкість матеріальної точки.
-

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
калькулятори, креслярські інструменти, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 205-211.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001. –С. 191-200, 204-209, 211-218.

Теоретичні відомості:

Тема: Диференціювання функцій

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ кутовий коефіцієнт дотичної

Таблиця похідних елементарних функцій

1. Похідна степеневої функції

$$y = x^{\alpha}: \; y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \; \alpha \in R$$

2. Похідна показникової функції

$$y = a^x: \quad y' = a^x \quad \ln a;$$

$$y = e^x: \quad y' = e^x.$$

3. Похідна логарифмічної функції

$$y = \log_a x: \quad y' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$y = \ln x: \qquad y' = \frac{1}{x}.$$

4. Похідні тригонометричних функцій

$$y = \sin x: \qquad y' = \cos x;$$

$$y = \cos x: \quad y' = -\sin x;$$

$$y = \mathrm{tg} x: \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y = \mathrm{ctg} x: \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$**:**

$$y' = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Середня швидкість

Середня швидкість тіла, що рухається вздовж деякої лінії, визначається за формулою

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Миттєва швидкість

Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії $s = f(t)$, називається похідна функції $s = f(t)$ за часом t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).}$ рівняння дотичної до графіка функції

Знайти похідні функцій:

1. $(7x^5)' = 7(x^5)' = \underbrace{7 \cdot 5}x^4 = 35x^4$

2. $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$.

$$y' = (x^3 + 7x^2 - 5x + 4)' = (x^3)' + (7x^2)' - (5x)' + (4)' = 3x^2 + 14x - 5 + 0$$

3. $y = (x^2 + 1)\ln x$.

$$y' = \left[\underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{\ln x}_{v}\right]' = (x^2+1)'\ln x + (x^2+1)(\ln x)' = 2x\ln x + (x^2+1)\frac{1}{x}.$$

4. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-5}$.

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-5}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-5) - (x^2+1)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} = \frac{2x(x^2-5) - 2x(x^2+1)}{(x^2-5)^2} = \frac{-10x - 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{-12x}{(x^2-5)^2}$$

5. $y = \sqrt{x^5 - 10^x}$;

$g(x) = u = x^5 - 10^x;\ f(u) = \sqrt{u};$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(5x^4 - 10^x\ln 10) = \frac{5x^4 - 10^x\ln 10}{2\sqrt{x^5 - 10^x}}.$$

6. $y = \cos^3(\ln 2x)\mathrm{tg}\dfrac{1}{x}$

Візьмемо: $u = \cos^3(\ln 2x),\ v = \mathrm{tg}\dfrac{1}{x}$. Тоді за правилом

$$y' = (\cos^3\ln 2x)' \cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x} + \cos^3(\ln 2x)\left(\mathrm{tg}\frac{1}{x}\right)'.$$

Функції $\cos^3\ln 2x$ і $\mathrm{tg}\dfrac{1}{x}$ — складні.

$$(\cos^3(\ln 2x))' = 3\cos^2(\ln 2x)\cdot(\cos(\ln 2x))' =$$

$$= 3\cos^2(\ln 2x)(-\sin\ln 2x)(\ln 2x)' = -3\cos^2(\ln 2x)\sin\ln 2x\,\frac{1}{2x}\cdot 2.$$

$$\left(\mathrm{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}.$$

Нехай $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ — рівняння вільного руху тіла, g — прискорення його вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу; у момент часу $t = 2$ с.

• За означенням маємо

$$v = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = \frac{1}{2}g\cdot 2t = gt.$$

Зокрема, якщо $t = 2$, дістаємо:

$v = g\cdot 2 = 9{,}8\cdot 2 = 19{,}6$ м/с.

Написати рівняння дотичної до кривої $y = x^3$ у точці $M(1;\,1)$.

• Оскільки $y' = 3x^2$, то кутовий коефіцієнт дотичної

$$y'|_{x=1} = (3x^2)|_{x=1} = 3.$$

Рівняння дотичної буде таке: $y - 1 = 3(x - 1)$, або $y = 3x - 2$.

Практичне заняття 7

Тема: Дослідження функцій на екстремум. Задачі на найбільше та найменше значення функції

Мета: Повторити та закріпити достатні умови монотонності та екстремуму функцій. Формувати вміння та навики застосування диференціального числення до дослідження на монотонність, екстремуми та найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:
- правила диференціювання; таблицю похідних;
- умови монотонності та екстремуму функції.

Студенти повинні уміти:
- Досліджувати функції на монотонність, екстремуми, найбільше та найменше значення функції.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
олівець, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 226-227.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001. –С. 221-227, 236-240.

Теоретичні відомості:

Тема: Дослідження функцій на екстремум. Задачі на найбільше та найменше значення функції

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ кутовий коефіцієнт дотичної

Таблиця похідних елементарних функцій

2. Похідна степеневої функції

$$y = x^{\alpha}: \ y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \ \alpha \in R$$

2. Похідна показникової функції

$$y = a^x: \quad y' = a^x \ \ln a;$$
$$y = e^x: \quad y' = e^x.$$

3. Похідна логарифмічної функції

$$y = \log_a x: \quad y' = \frac{1}{x \ln a};$$
$$y = \ln x: \quad y' = \frac{1}{x}.$$

4. Похідні тригонометричних функцій

$$y = \sin x: \quad y' = \cos x;$$
$$y = \cos x: \quad y' = -\sin x;$$
$$y = \mathrm{tg} x: \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$y = \mathrm{ctg} x: \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$**:**

$$y' = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

1. Знайти нулі функції $f'(x)$, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ (якщо вони є), і розбити інтервал $(a; b)$ за допомогою знайдених коренів $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, на інтервалі $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, …, $(x_{k-1}; x_k)$, $(x_k; b)$.

2. Визначити знак похідної на кожному із таких інтервалів. Якщо при цьому виявиться, що на двох сусідніх інтервалах $(x_{i-1}; x_i)$ $(x_i; x_{i+1})$ похідна $f'(x)$ має один і

той самий знак, то функція строго монотонна в інтервалі $(x_{i-1}; x_{i+1})$. Наприклад, якщо $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростаюча, якщо $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадна.

Строга монотонність за теоремою 6 зберігається, якщо до частинного інтервалу приєднати його кінці, на яких за умовою функція неперервна. Якщо $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ неперервна, а в інтервалі $(a; b)$ похідна $f'(x)$ не перетворюється на нуль, то на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ буде строго монотонною, а саме при $f'(x) > 0$ — зростаючою, при $f'(x) < 0$ — спадною.

Достатні умови строгого екстремуму

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:

1) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий максимум;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку. Розглянемо деякі випадки знаходження найбільших і найменших значень функцій на проміжку, коли функція неперервна і диференційовна на всьому проміжку за винятком точок, де в неї немає скінченної похідної.

I. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a; b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).

2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов'язково виясняти, чи буде в них екстремум).

3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Знайти проміжки монотонності та екстремуми функцій:

$3x^3 - 9x^2 - 27x + 30;$

$2x^3 - 21x^2 + 36x - 20;$

$\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1;$

$-2x^3 - 15x^2 + 36x + 10;$

$x^3 - 9x^2 + 15x - 3;$

$x^3 - 3x^2 + 6x + 10;$

$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;$

Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

$y = x^2 - 4x + 3$, $[0;3]$.

$y = x^2 - 6x + 13$, [0;6].

Практичне заняття 8

Тема: Безпосереднє знаходження невизначеного інтеграла

Мета: Повторити властивості невизначеного інтеграла та основні табличні інтеграли. Формувати вміння та навики обчислення невизначеного інтеграла методом безпосереднього інтегрування. Виховувати вміння індивідуального

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв'язування вправ.

Студенти повинні знати:

- Таблицю невизначених інтегралів.
-

Студенти повинні уміти:

- Знаходити первісну;
- Знаходити невизначений інтеграл за допомогою табличних інтегралів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
олівець, робочі зошити

Література

Валуце И.И. Математика для техникумов.-М.: Наука, 1990.- С. 253-255.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К., 2001. –С. 252-255.

Теоретичні відомості:

Тема: Безпосереднє знаходження невизначеного інтеграла

Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \quad a \neq 0 \text{ – стала.}$$

2. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то й $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

1) $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx) + C$,

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$,

3) $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$,

де k та b - сталі величини.

Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{1-6x+4x^2}{x}dx$, 2) $\int \frac{dx}{x^2+16}$, 3) $\int \frac{3x-5-24x^2}{x}dx$, 4) $\int \left(3x^2+4\right)dx.$

5)

$$\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx.$$

$$\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx = \int x^2dx-\int 2x\sqrt{x}dx+\int 3\sqrt[3]{x}dx+\int\frac{5}{x}dx = \int x^2dx-2\int x^{3/2}dx+3\int x^{1/3}dx+$$

$$+5\int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}-2\frac{x^{5/2}}{5/2}+3\frac{x^{4/3}}{4/3}+5\ln|x|+C = \frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+5\ln|x|+C.$$ 6)

$$\int\left(5^x-\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

$$\int\left(5^x-\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int 5^x dx-3\int\frac{dx}{\cos^2 x}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5^x}{\ln 5}-3tgx+4\arcsin x+C.$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}+2x-x^4}{x^5}dx.$$

7)

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}+2x-x^4}{x^5}dx = \int\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx+2\int\frac{x}{x^5}dx-\int\frac{x^4}{x^5}dx = \int\left(x^{-\frac{14}{3}}+2x^{-4}-x^{-1}\right)dx = \frac{x^{-11/3}}{-11/3}+2\frac{x^{-3}}{-3}-$$

$$-\ln|x|+C = -\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}}-\frac{2}{3x^3}-\ln|x|+C.$$

8)

$$\int\left(3\sin 6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx.$$

$$\int\left(3\sin 6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx = 3\int\sin 6x dx-2\int\frac{dx}{5x-1}+\int e^{\frac{x}{3}}dx = 3\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right)-2\cdot\frac{1}{5}\ln|5x-1|+3e^{\frac{x}{3}}+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 6x-\frac{2}{5}\ln|5x-1|+3e^{\frac{x}{3}}+C.$$

Практичне заняття 9

Тема: Знаходження невизначеного інтеграла інтегруванням заміною змінної та частинами

Мета: Повторити умови інтегрування заміною змінної і частинами.
Формувати вміння та навики обчислення невизначеного інтеграла методом інтегрування заміною змінної і частинами. Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Інтегрування заміною змінної.
2 Інтегрування частинами.

Студенти повинні знати:

- метод знаходження невизначеного інтеграла заміною змінної;
- метод знаходження невизначеного інтеграла інтегруванням частинами.

Студенти повинні уміти:

- знаходити невизначений інтеграл заміною змінної;
- знаходити невизначений інтеграл інтегруванням частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, таблиця формул інтегрування, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С.255-266.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 336-337.

Теоретичні відомості:

Тема: Знаходження невизначеного інтеграла інтегруванням заміною змінної та частинами

формула інтегрування підстановкою

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Нехай $u = u(x)$ і $\upsilon = \upsilon(x)$ - функція, що має неперервні похідні. Тоді $d(u\upsilon) = u \cdot d\upsilon + \upsilon \cdot du$. Проінтегрувавши цю рівність, отримаємо

$$\int d(u\upsilon) = \int ud\upsilon + \int \upsilon du \quad \text{або} \quad \int ud\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du$$

Отримана формула називається ***формулою інтегрування частинами***

Обчислити інтеграли:

1. $\int \cos 5x dx.$

Замінимо змінну $t = 5x$, тоді $x = \frac{t}{5}$ і $dx = \frac{dt}{5}$. Підставляючи нашу заміну та повертаючись до початкової змінної, маємо:

$\int \cos 5x dx = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C$

2. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$

Припустимо, що $t = \frac{1}{x}$, тоді $x = \frac{1}{t}$ і $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Підставляючи нашу заміну та повертаючись до початкової змінної, маємо:

$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int t^2 e^t \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

3. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

Поклавши $x = t^3$, знайдемо $dx = 3t^2 dt$. Ця підстановка призводить до того, що під знаком синуса зникає корінь і з'являється нова змінна інтегрування. Маємо:

$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{\sin t \cdot 3t^2 dt}{\sqrt[3]{t^6}} = 3\int \sin t dt = -3\cos t + C.$

Повертаємося до початкової змінної x. Підставляючи в результат інтегрування $t = \sqrt[3]{x}$, дістанемо:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3\cos \sqrt[3]{x} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2t - 2\ln|1+t| + C =$

$= 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C.$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x=\frac{1}{t}; \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}.$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1+2x^2=t \\ 4xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{4}tdt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2}+C.$$

7. $\int x^3 e^{-2x^4}dx.$

$$\int x^3 e^{-2x^4}dx = \left| \begin{array}{l} -2x^4=t \\ -8x^3dx=dt \\ x^3dx=-\frac{1}{8}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{8}\int e^t dt = -\frac{1}{8}e^t + C = -\frac{1}{8}e^{-2x^4}+C.$$

8. $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx.$

$$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \left| \begin{array}{l} 2\ln x+3=t \\ \frac{2dx}{x}=dt \\ \frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

Обчислити інтеграли:

1. $\int xe^x dx.$

Припустивши $u=x,\ d\upsilon=e^x dx,$ тоді $du=\frac{dx}{x}, \upsilon=x$

Звідси за формулою (1.3) матимемо

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2. $\int x\cos xdx.$

Покладемо $u=x, d\upsilon=\cos xdx,$ тоді $du=dx, \upsilon=\sin x$

Тому, використовуючи формулу (1.3), маємо

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

Надалі, після умови вказуються вирази $u, d\upsilon$ і υ, du.

3. $\int (2x-3)\cdot 4^x dx.$

$$\int(2x-3)\cdot 4^x dx = \left|\begin{matrix} u=2x-3, du=2dx \\ dv=4^x dx, v=\dfrac{4^x}{\ln 4}\end{matrix}\right| = (2x-3)\cdot\frac{4^x}{\ln 4}-\int\frac{2\cdot 4^x dx}{\ln 4}=\frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x-\frac{2}{\ln 4}\cdot\frac{4^x}{\ln 4}+C$$

4. $\int x^2 e^{3x} dx.$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left|\begin{matrix} u=x^2, du=2xdx \\ dv=e^{3x}, v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right| = x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx.$$

Щоб знайти $\int xe^{3x}dx$, застосуємо даний метод ще раз.

$$x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left|\begin{matrix} u=x, du=dx \\ dv=e^{3x}, v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+$$

$$+\frac{2}{27}e^{3x}+C=e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)+C.$$

5. $\int \lg x dx.$

$$\int \lg x dx = \left|\begin{matrix} u=\lg x, du=\dfrac{dx}{x\ln 10} \\ dv=dx, v=x\end{matrix}\right| = x\lg x-\frac{1}{\ln 10}\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\lg x-\frac{1}{\ln 10}x+C.$$

6. $\int e^x\cos x dx.$

$$\int e^x\cos xdx = \left|\begin{matrix} u=e^x; & du=e^x dx; \\ dv=\cos xdx; & v=\int\cos xdx=\sin x\end{matrix}\right| = e^x\sin x-\int e^x\sin xdx = \left|\begin{matrix} u=e^x; \\ dv=\sin xdx;\end{matrix}\right.$$

$$=e^x\sin x-\left(-e^x\cos x-\int(-\cos x)e^x dx\right)=e\sin x+e^x\cos x+\int e^x\cos xdx.$$

Припустимо, що $I=\int e^x\cos xdx$

Маємо:

$I=e^x\sin x+e^x\cos x-I$ або $2I=e^x\sin x+e^x\cos x$;

Звідси отримуємо:

$$I=\int e^x\cos xdx=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C.$$

Практичне заняття 10

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Мета: Повторити умови інтегрування заміною змінної і частинами.
Формувати вміння та навики обчислення визначеного інтеграла методом інтегрування заміною змінної і частинами. Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

3 Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної.
4 Обчислення визначеного інтеграла частинами.

Студенти повинні знати:

- формулу Ньютона-Лейбніца;
- метод знаходження визначеного інтеграла заміною змінної;
- метод знаходження визначеного інтеграла інтегруванням частинами.

Студенти повинні уміти:

- знаходити визначений інтеграл заміною змінної;
- знаходити визначений інтеграл інтегруванням частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, таблиця формул інтегрування, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 279-283.
Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, с 365-385.

Теоретичні віломості:

Тема: Обчислення визначеного інтеграла заміною змінної та частинами

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема. **Якщо: 1)** $f(x)$ **— неперервна для** $x \in [a;\, b]$**; 2)** $\varphi(\alpha) = a,\quad \varphi(\beta) = b;$ **3)** $x = \varphi(t)$ **та** $\varphi'(t)$ **— неперервні для** $t \in [\alpha;\, \beta]$**; 4) при** $t \in [\alpha;\, \beta] \Rightarrow x \in [a;\, b]$**, то**

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2,\ \ dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема **. Якщо функції** $u(x)$ **та** $v(x)$ **мають неперервні похідні для** $x \in [a;\, b]$**, то**

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (2)$$

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад . $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{ll} 1 + \sqrt{2x+1} = t, & dx = (t-1)dt; \\ x = \frac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| =$

$$= \int_2^4 \frac{t-1}{t}dt = \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = (t - \ln|t|)\Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - (2 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

Приклад $\int_1^e x\ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x}; \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2\cdot dx}{x} =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Обчислити визначені інтеграли

1. $\int_0^1 \left(1 + e^{3x}\right)^2 e^{3x} dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left(\left(1 + e^3\right)^3 - 8\right).$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. *Відповідь.* $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4 + x^2\right)^3}}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x dx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\left(e^{\pi} + 1\right)$.

Практичне заняття 11

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур

Мета: набуття навичок знаходження площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла. Формувати вміння та навики побудови плоскиї фігур та обчислення їх площ

Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв'язування задач на знаходження площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Студенти повинні знати: геометричний зміст та властивості визначеного інтеграла, що застосовуються до обчислення площ плоских фігур

Студенти повинні уміти: знаходження площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, таблиця невизначених інтегралів, робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 290-294.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 401-405.

Теоретичні відомості:

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур

Якою б не була криволінійна фігура, що обмежена неперервними кривими лініями, шляхом її розсікання лініями паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \ge 0.$ Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \le 0$ (рис. 2),

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \qquad (7.20)$$

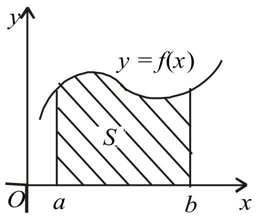


Рис. 1

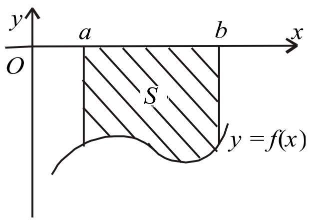


Рис. 2

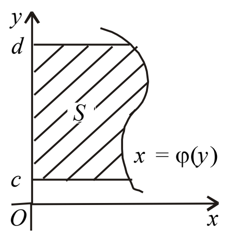


Рис. 3

II. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \ge 0.$ Площа S такої фігури буде

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy, \quad (1)$$

а якщо $\varphi(y) \le 0$ (рис. 4), то

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|. \qquad (2)$$

III. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b.$ Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \ge g(x)$ для $x \in [a;\, b]$ (рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x) \big) dx. \qquad (3)$$

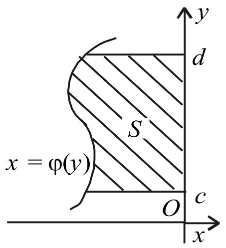


Рис. 4

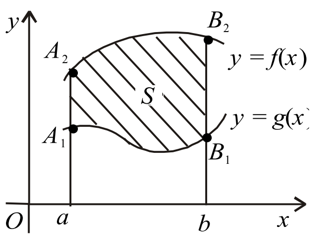


Рис. 5

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = -x^2 + 4x + 5 \text{ та } y = 2x - 3.$$

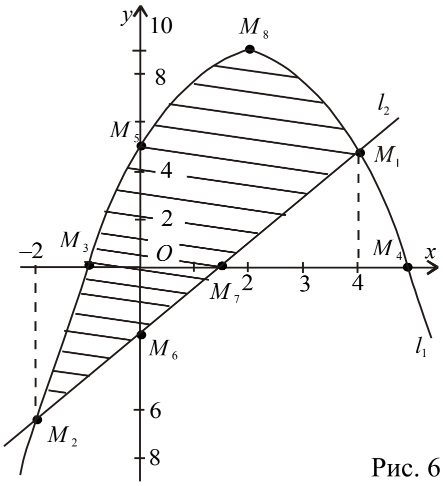


Рис. 6

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 6).

$$l_1\cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1\cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2\cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\,9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ за формулою (7.23) буде така:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

Приклад . Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x=y^2+2y+6(l_1),\ \ x-3y=26(l_2)$.

● Побудуємо фігуру, обмежену параболою $x=y^2+2y+6$ та прямою $x-3y=26$, на координатній площині; при цьому обов'язково треба знайти точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат (рис. 7)

$$l_1\cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ x-3y=26 \end{cases} \begin{cases} x=3y+26 \\ y^2-y-20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y+26 \\ \left[\begin{array}{l} y=-4 \\ y=5 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=14 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=41 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(14;\ -4) \\ M_2(41;\ 5). \end{array}\right.$$

$$l_1\cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(6;\ 0).$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y^2 + 2y + 6 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 26 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(0;\ -\frac{26}{3}\right).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 26 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 26 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(26;\ 0).$$

$x = y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow (x-5) = (y+1)^2 \Rightarrow M_6(5;\ -1)$ — вершина параболи.

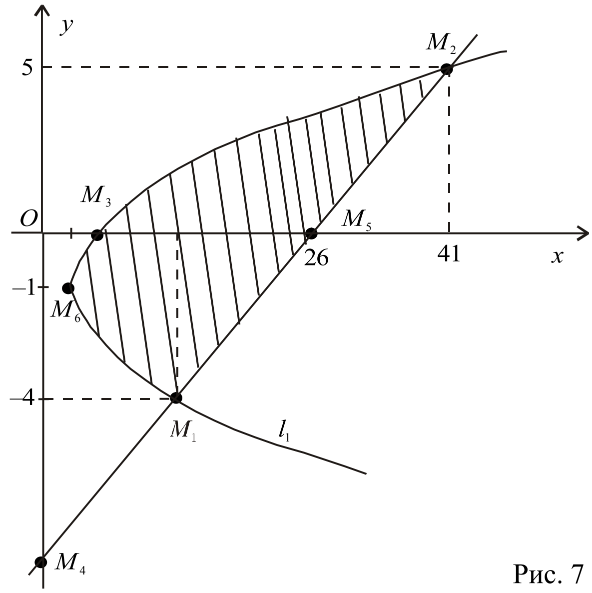


Рис. 7

Для обчислення площі фігури $S_{M_1M_2M_6}$ найбільш зручно скористатись формулою $S = \int\limits_c^d \left(\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\right)dy$.

Отже, за цією формулою дістанемо:

$$S_{M_1M_2M_6} = \int\limits_{-4}^{5}\left(3y + 26 - \left(y^2 + 2y + 6\right)\right)dy = \int\limits_{-4}^{5}\left(-y^2 + y + 20\right)dy =$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 20y\right)\Bigg|_{-4}^{5} = -\frac{125}{3} + \frac{25}{2} + 100 - \left(\frac{64}{3} + \frac{16}{2} - 80\right) = 121{,}5.$$

Обчислити площі фігур:

1 $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. *Відповідь.* $S = \dfrac{125}{6}$.

2. $y = -x^2 + 9$, $y = 2x + 1$. *Відповідь.* $S = 36$.

Практичне заняття 12

Тема: Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Мета: повторити та закріпити поняття диференціальних рівнянь, лінійних однорідних дифрівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Формувати вміння та навики розв’язування лінійних однорідних дифрівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Методи: словесний, практичний

План:

1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Студенти повинні знати:

- три випадки розв’язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Студенти повинні уміти:

- розв’язувати квадратні рівняння;
- розв’язувати лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: робочий зошит

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, С. 341-345.

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 470-472.

Теоретичні відомості:

Тема: Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами

Частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

де p, q - сталі величини, шукають у вигляді функції $y = e^{kx}$, де k - довільне число. Після підстановки цієї функції у лінійне однорідне рівняння (1) для визначення коефіцієнтів k одержують алгебраїчне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (2)$$

яке називається *характеристичним* рівнянням даного диференціального рівняння (1).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1) в залежності від коренів характеристичного рівняння (2) має відповідний вигляд:

1) якщо корені дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \qquad (3)$$

2) якщо корені дійсні рівні $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right), \qquad (4)$$

3) якщо корені комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha + \beta i$, то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \qquad (5)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівнянь: 1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 16y = 0$; 3) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

Розв’язання. Складемо відповідні характеристики рівняння для кожного рівняння.

1) $k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2$’

Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

2) $k^2 - 8k + 16 = 0, \quad k_1 = k_2 = 4$.

Корені дійсні рівні, то в силу (3) $y = e^{4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3) $k^2 + 2k + 17 = 0, \quad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm \sqrt{-16} = -1 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)} = -1 \pm 4i;$
$k_{1,2} = -1 \pm 4i; \quad \alpha = -1, \quad \beta = 4.$

Тоді $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Практичне заняття 13

Тема: Розв′язування прикладів

Мета: Формувати вміння та навики досліджувати рядів на збіжність за допомогою ознак порівнянь, Даламбера та Коші Виховувати вміння індивідуальної роботи, прививати любов до дисципліни.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Розв′язування прикладів на дослідження рядів за допомогою ознак порівняння, Даламбера та Коші.

Студенти повинні знати:

- ознаки збіжності рядів

Студенти повинні уміти:

- досліджувати ряди за допомогою ознак порівняння, Даламбера та Коші.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, картки індивідуальних завдань

Література

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990, с 410-414.

Теоретичні віломості:

Тема: Розв′язування прикладів

<u>Ознака Даламбера</u>.

Якщо для ряду з додатними членами $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то: 1) при $\rho < 1$ ряд *збіжний,*

2) при $\rho > 1$ ряд *розбіжний.*

<u>Приклад 1</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{5} + \frac{9}{25} + \frac{16}{125} + ... + \frac{(n+1)^2}{5^n} + ...$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера.

За умовою маємо $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{5^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+2)^2}{5^{n+1}}$.

Обчислимо $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n+2)^2}{5^{n+1}} : \dfrac{(n+1)^2}{5^n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2 \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot (n+1)^2} = \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1} \right)^2 =$

$= \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = \dfrac{1}{5} \cdot 1 = \dfrac{1}{5} < 1$. За ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

<u>Приклад 2</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + ... + \frac{4^n}{n!} + ...$$

Розв'язання. Запишемо n–й та $(n+1)$–й члени заданого ряду

$$u_n = \frac{4^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зауваження. $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ (в математиці «!» – знак факторіалу).
$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{4^n}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 4^n} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{(n+1)} = 0 < 1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

<u>Приклад 3</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$1+\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{8}{\sqrt{10}}+\ldots+\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}+\ldots$$

Розв'язання. Оскільки для заданого ряду

$$u_n=\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}, \quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}, \text{ то}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n}{2^n}\cdot\sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}}=2>1.$$

Отже, $\rho=2>1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *розбіжний*.

Практичне заняття № 14

Тема: Розв′язування вправ. Контрольна робота.

Мета: перевірка набутих знань, вмінь та навиків за курс «Вищої математики»

Методи: практичний

План:

1 Розв′язування прикладів.
2 Контрольна робота.

Студенти повинні знати: основні формули і теореми з курсу «Вищої математики», таблицю похідних і інтегралів.

Студенти повинні уміти: записати рівняння прямої і площини, обчислювати визначники матриць, векторні і скалярні добутки векторів, знаходити границі функцій, досліджувати функції на екстремуми і монотонність, знаходити похідні функцій, обчислювати інтеграли, знаходити розв′язки дифрівнянь і досліджувати числові ряди. Розв'язувати задачі на знаходження ймовірності

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, плакати

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов.-М.:Наука, 1990.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.

Контрольна робота:

Варіант 1

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$.
2. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння y′′-13′+42y=0.
3. Знайти кути і периметр трикутника, заданого вершинами A(-2;0;3), B(1;-2;4), C(0;-2;4).
4. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x^3 - 3x + 5$.
5. Обчислити інтеграл $\int (9-x)^8 dx$.
6. Виконати додавання комплексних чисел: $(3+6i)+(-1-5i)$.

Варіант 2

1. Знайти частинний розв′язок диференціального рівняння xy′=y, якщо y=1 при x=1.
2. В ящику 10 деталей, з яких 3 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде не бракованою?
3. Знайти інтеграл $\int (x+2)dx$
4. Обчислити похідну функції $y=4x^5-3x^2+x-7$.
5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.
6. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Варіант 3

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
2. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку
$y = x^2 - 4x + 3$, [0;3].
3. Знайти інтеграл $\int_{-1}^{3} x^4 dx$.
4. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7).
5. Скількома способами можна переставити 6 книжок на полиці.
6. Виконати додавання комплексних чисел: $(9-5i)+(-2-i)$.

Варіант 4

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.
2. Дослідити числовий ряд на збіжність за ознакою Коші $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{7n-2}\right)^n$.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=9+x^2$, y=0, x=-1, x=3.
4. Записати рівняння прямої, що проходить через точки A(-1;4) і B (0;-1).
5. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння y′′+2y′+5y=0.

6. Перевірити чи лежать на еліпсі $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ точки A(0;2), K(3;0), B(1;2).

Варіант 5

1. Знайти $\int_0^3 x^3dx$.
2. Знайти похідну функцій $y=\cos(9-x-x^3)$.
3. Знайти частинний розв′язок диференціального рівняння $y'=x^2+x+1$, якщо y=3 при x=0.
4. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознаки Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$.
5. Знайти координати фокуса параболи $y^2=4px$
6. Виконати додавання комплексних чисел: $(2+3i)+(6+3i)$

Варіант 6

1. В ящику 12 деталей, з яких 3 бракованих. Яка ймовірність того, що 2 навмання вибрані деталі будуть не бракованими?
2. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=4x^2+5x-1$ в точці з абсцисою x=2.
3. Дослідити числовий ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$.
4. Записати рівняння прямої, що проходить через точки A(-3;4) і B (-2;0).
5. Обчислити інтеграл $\int\frac{1-6x+4x^2}{x}dx$.

Варіант 7

1. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2dx}{\sin^2 x}$.
2. Знайти похідну функцій $y=\sin(7x^3+4)$.
3. Записати рівняння прямої, що проходить через точки A(-4;5) і B (2;3).
4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2$, $y=x$
5. Дано трикутник ABC з координатами вершин A (2;4;5), B(-3;2;2), C(-1;0;3). Обчислити: периметр трикутника і його кути трикутника;
6. Виконати додавання комплексних чисел: $(7-3i)+(-9+3i)$

Варіант 8

1. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
2. Дано трикутник ABC з координатами вершин A (1;-2;-1), B(4;4;4), C(2;1;-1). Обчислити периметр і довжину медіани ВД.
3. Знайти $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx$.
4. Дано три точки A(1;3), B(4;2), C(-3;-4) на площині. Знайти рівняння прямих AB і AC.
5. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''-8y'+16y=0$.

6. Записати рівняння параболи, якщо рівняння директриси x=14.

Варіант 9

1. Обчислити $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Дано трикутник ABC з координатами вершин A (1;-1;3), B(3;-1;1), C(-1;1;3). Обчислити: периметр трикутника і його кути.

3. Обчислити $\int xe^{x}dx$.

4. Точка рухається прямолінійно за законом $S=4t^3-t^2-4$. Знайти швидкість точки в момент часу t=3 с.

5. В ящику 20 деталей, з них 8 не бракованих. Яка ймовірність того, що одна взята навмання деталь буде бракованою.

6. Виконати додавання комплексних чисел: $(6+5i)+(4+6i)$

Варіант 10

1. Обчислити $\int (x+7)^5 dx$.

2. Дано три точки A(2;3), B(-4;4), C(5;5) на площині. Знайти рівняння прямих AB і AC.

3. Дано трикутник ABC з координатами вершин A (1;-1;3), B(3;-1;1), C(-1;1;3). Обчислити площу трикутника.

4. Знайти загальний розв'язок дифрівняння $y''-6y'+25y=0$.

5. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $y = x^2-6x+13$, [0;6].

6. Обчислити $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$.

Варіант 11

1. Точка рухається прямолінійно за законом $S=2t^2-2t+4$. Знайти швидкість точки в момент часу t=5 с.

2. Обчислити $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

3. Обчислити $\int_0^3 5x^2 dx$.

4. Дано трикутник ABC з координатами вершин A (-1;3;1), B(-3;2;4), C(1;1;1). Обчислити: периметр трикутника і його кути.

5. Знайти похідну функції $y=\ln\sqrt{x}$.

6. Виконати додавання комплексних чисел: $(-3+5i)+(4-8i)$

Варіант 12

1. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2+16}$.

2. Дано три точки A(2;1), B(-3;3), C(-2;2) на площині. Записати рівняння прямих AB і AC.
3. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''-6y'+25y=0$.
4. Обчислитиплощу фігури обмеженої лініями $y=-x-2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.
5. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку
$y = 8 - 0{,}5x^2$, $[-2;2]$.
6. Знайти координати фокуса та директриси параболи $y^2=6x$.

Варіант 13

1. Знайти похідну функції $y=(13x-9)^3$.
2. Обчислити периметр і кути трикутника заданого координатами
A(10;-2;8), B(8;0;7), C(10;2;8).
3. Записати рівняння кола з центром в точці (-5;2) і радіусом 4.
4. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{3} 4x^4 dx$.
5. Дослідити числовий ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12^n}$.
6. Виконати додавання комплексних чисел: $(3+2i)+(-1-5i)$

Варіант 14

1. Знайти екстремуми функції $y=2x^3-3x^2-12x+8$.
2. Знайти похідну функції $y=e^{4x+\sin x}$
3. Обчислити кут між векторами $\vec{a}=(-1;0;7)$; $\vec{b}=(-4;2;4)$;
4. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
5. За формулами Крамера розв′язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

6. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}$, $\vec{b} = \vec{AB}$,
A (4, 6, 3), B (-5, 2, 6), C (4, -4, -3).

Варіант 16

1. За формулами Крамера розв′язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$$

2. Розв′язати квадратне рівняння $x^2+3x+4=0$
3. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''+2y'-15y=0$.
4. Знайти похідну функції $y = e^{-3x}(1+\ln x)$;
5. Знайти довжину вектора $\vec{AB}$, якщо A(-1;-1;4), B(-2;2;5).
6. Обчислити $\int (7x+2)^8 dx$

Варіант 15

1. Обчислити $\int \sin^4 x \cos x dx$.
2. Знайти похідну функції $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$;
3. Обчислити площу фігури обмеженої лініями $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$.
4. Записати рівняння прямих AB і AC, якщо A(8;3), B(5;-4), C(5;0).
5. Точка рухається прямолінійно за законом $S=2t^3-2t^2+4$. Знайти швидкість точки в момент часу t=2 с.
6. Виконати множення комплексних чисел: (4-5ἰ)(3+2ἰ).

Варіант 17

1. Знайти похідну функції $y = e^{-3x}(1 + \ln x)$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x - \frac{\pi}{6}) dx$.
3. Розвязати квадратне рівняння $x^2+3x+5=0$
4. Знайти екстремуми функції $y=x^3-6x^2+16$.
5. Записати рівняння прямих AB і AC, якщо A(0;3), B(-5;4), C(-5;5).
6. Знайти периметр і площу трикутника ABC, якщо A(1;2;6), B(0;3;8), C(-5;-1;4).

Варіант 18

1 Знайти периметр і площу трикутника ABC, якщо A(1;-2;-1), B(4;4;4), C(2;1;-1).
2 Записати рівняння прямих AB і AC, якщо A(8;3), B(5;-4), C(5;0).
3. Розвязати квадратне рівняння $x^2+2x+3=0$.
4. Виконати множення комплексних чисел: $(4 - 3i)(8 + 2i)$.
5. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=2x^3+2x-1$ в точці x=1.
6. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознаки Коші: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{5^n}$

Варіант 19

1. Знайти похідну функції y= $\mathrm{ctg}^5(8x+2)$
2. За формулами Крамера розв′язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$
3. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознаки Коші: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n^2}{4n^2 + 3}$.
4. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''-2y'-8y=0$.
5. Дано три точки A(1;3), B(4;2), C(-3;-4). Знайти відстань від точки B до прямої AC.
6. Обчислити $\int_2^3 2x^4 dx$.

Варіант 20

1. Виконати множення комплексних чисел: $\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)$.
2. Знайти розв′язок $\int \frac{e^x}{4 + e^x} dx$.
3. Знайти частинний розв′язок дифрівняння $x^2dx-ydy=0$, якщо y(0)=2.

4. При якому значенні m вектори $\vec{a}=(-6;m;7);\vec{b}=(5;2;4m)$ будуть взаємно перпендикулярними.
5. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x^3 - 3x+5$.
6. Скількома різними способами можна вибрати з 15 чоловік делегацію в складі 3 осіб.

Варіант 21

1. Знайти частку комплексних чисел: $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

2. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознаки Коші: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{8n+5}\right)^n$.

3. Записати рівняння директриси, якщо рівняння параболи $y^2=-8x$.
4. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку
$y = 2x^2 - 3x + 3$, [0;5].
5. Піраміда задана вершинами A(-1;3;3), B(1;-2;1), C(-3;1;1) ,Д(-2;3;-2). Знайти об′єм піраміди.
6. Знайти $\int(7x+3)^8\,dx$.

Варіант 22

1. Виконати множення комплексних чисел: $\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{4}\right)\left(2+1\frac{1}{3}i\right)$
2. Скласти рівняння кола з центром в точці A(-1;-4) та радіусом 3,5.
3. Яка ймовірність того, що навмання взята кулька з урни буде білою, якщо в урні 7 білих і 4 чорних.
4. За формулами Крамера розв′язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16, \\ x_1+3x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$$

5. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=3x^2-4x+8$ в точці з абсцисою x=2.
6. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''-y'-2y=0$.

Варіант 23

1. Знайти частку комплексних чисел: $\frac{5+6i}{4+8i}$.
2. Точка рухається прямолінійно за законом $S=3t^3-2t^2-4$. Знайти швидкість точки в момент часу t=4 с.
3. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознаки Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$.
4. Дано три точки A(2;1), B(-3;3), C(-2;2) на площині. Записати рівняння прямої, що проходить через точку B перпендикулярно прямій AC.
5. Знайти $\int\frac{1-6x+4x^2}{x}dx$.
6. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $\frac{2dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$

Варіант 24

1. Виконати множення комплексних чисел: $(-3-7i)(-3i)$.

2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. На першому курсі студенти мають 10 навчальних предметів і 5 різних занять на день. Скількома способами можна скласти відповідний розклад?

4. Знайти похідну функції $y=\ln\sqrt{x}+(x+3)^4$.

5. Знайти загальний розв'язок дифрівняння $y''-12y'+36y=0$.

6. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$.

Варіант 25

1. Знайти частку комплексних чисел: $\frac{2+5i}{3-2i}$.

2. Скількома способами можна розмістити 10 осіб за столом, на якому поставлено 10 предметів?

3. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x^3-3x^2+24x-12$.

4. Дано три точки A (6;3), B(4;-4), C(5;-5) на площині. Записати рівняння прямих AB і AC, привести їх до загального виду.

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: y=3x, y=0, x=-1, x=2.

6. Знайти ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$.

Практичне заняття № 15

Тема: Підсумкове заняття з дисципліни
Мета: підвести підсумки роботи
Методи: словесний, практичний

План:

1 Розв′язування практичних завдань.

Студенти повинні знати: основні формули і теореми з курсу «Вищої математики», таблицю похідних і інтегралів.

Студенти повинні уміти: застосовувати основні поняття і формули для розв′язання задач, розв′язувати завдання різних ступенів складності з курсу «Вищої математики».

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори, плакати

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. -К.: А.С.К., 2001.

Розв’зування вправ:

1. Виконати множення комплексних чисел: $\left(\sqrt{2}-4i\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}i\right)$

2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''+22y'+121y=0$.

4. Знайти інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2dx}{\sin^2 x}$.

5. Дано трикутник АВС з координатами вершин А (4;-1;-2), В(6;1;-2), С(5;0;-3). Обчислити периметр трикутника.

6. Знайти похідну функції: $y=-\frac{1}{6}+4x^2-9x^3$.

7 Обчислити добуток спряжених комплексних чисел: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i\right)$.

8 Знайти добуток матриць $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9 Яка ймовірність того, що навмання 2 вибрані деталі буде небракованими, якщо в ящику – 10 бракованих і 5 небракованих деталей.

10 Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x^3-3x+5$.

11 Дано три точки А (-2;-3), В(4;-4), С(2;-2) на площині. Записати рівняння прямих АВ і АС, привести їх до загального виду.

12 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=-2x+2$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.

13. Представити в тригонометричній формі комплексне число: $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. Знайти сумму матриць $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. Знайти загальний розв’язок дифрівняння $y''+2y'+y=0$.

16. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=-\frac{1}{3}x^2+3$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

17. Дано трикутник АВС з координатами вершин А (2;-3;5), В(-3;-2;1), С(-1;3;0). Обчислити периметр трикутника і довжину медіани ВД.

18. Скласти рівняння кола з центром в точці А(3;-9) та радіусом 2,5.