Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Чернігівський промислово-економічний коледж
Київського національного університету технологій та дизайну

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з НР
__________С.В.Бондаренко
_____ ___________2013 р.

Методичне забезпечення лекційного курсу з дисципліни ВИЩА МАТЕМАТИКА для студентів 2 курсу спеціальності:

5.05070104 «Монтаж і експлуатація електроустаткування підприємств і цивільних споруд»

Уклав Кур′ян О.В.

Розглянуто на засіданні
циклової комісії
природничо-наукової підготовки
Протокол №__ від ___ _________ 2013 року
Голова циклової комісії /А.М.Савчук/

Лекція 1

Тема: Вступ. Комплексні числа та дії над ними

Мета: ввести поняття комплексного числа, формувати навички дій з комплексними числами

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Предмет і метод математики.
2 Історична довідка про розвиток математики.
3 Поняття комплексного числа.
4 Дії з комплексними числами.
5 Модуль та аргумент комплексного числа.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001, с.3-10.
Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.- С. 78-92.

Теоретичні відомості

Тема: Вступ. Комплексні числа та дії над ними

1 ПРЕДМЕТ І МЕТОД МАТЕМАТИКИ

Слово „математика" походить від грецького слова „матема",що означає знання. Виникла математика в зв'язку із практичною діяльністю людей. З найдревніших часів люди зустрічались з необхідністю виділення сукупностей об'єктів, ділянок землі, тощо.

В результаті багатовікової практичної діяльності людей, виникли основні абстрактні математичні поняття: число, геометрична фігура, функція, похідна, інтеграл, випадкова величина, імовірність.

За свою історію математика, яка розвивалась у тісному зв'язку з розвитком виробничої діяльності людей, перетворилась в струнку дедуктивну науку, яка представляє собою потужний апарат для вивчення оточуючого нас середовища.

2ІСТОРИЧНА ДОВІДКА ПРО РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ

Історію розвитку математики можна умовно поділити на чотири періоди.

a. період - 6-5 ст. до н. е. - період зародження математики: арифметики, алгебри та початків геометрії.

b. період - 5 ст. до н. е. - середина 17 ст. - період елементарної математики. Створено десяткову систему числення, знайдено метод розв'язування лінійних рівнянь, почали застосовувати знаки додавання, віднімання, коренів, дужки, знаки степенів, букви для позначення, тощо. (Фалес, Архімед, Піфагор, Евклід, Вієт).

c. період - середина 17 - початок 20 століття - період створення математики змінних величин. Створився ряд нових математичних наук - теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, диференціальна геометрія. (Р.Декарт, ПФерма, Ж.Лагранж, І.Ньютон, ВЛейбніц, К.Якобі, К.Вейєрпгграсс, МВ.Остроградський, П.Л.Чебишев).

d. період - період сучасної математики - характеризується широким застосуванням математики до задач, що їх висуває природознавство і техніка. (Д.Гільберт, Г.Кантор, П.С.Александров, М.М.Боголюбов, А.М.Колмогоров).

Створення електронних обчислюваних машин значно розширює можливості математики. Завдяки ЕОМ математичні методи застосовуються нині не тільки таких традиційних науках , як механіка, фізика, астрономія, а й в хімії, біології, психології, соціології, економіці, медицині, лінгвістиці та ін.

3 ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Означення. **Комплексним числом** називається число виду $a + ib$, де a, $b \in R$, $i^2 = -1$.

Дійсне число a називається **дійсною частиною** комплексного числа $a + ib$, а дійсне число b — його **уявною частиною**. Число i називається **уявною одиницею**.

Означення. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються **рівними**, якщо $a = c$ і $b = d$.

Означення. Два комплексні числа виду $a + bi$ та $a - bi$ називаються **спряженими**.

Комплексні числа зображають на числовій площині. Для цього вибирають на площині прямокутну систему координат (рис. 1.11). Комплексне число $a + ib$ зображається точкою $M(x, y)$, абсциса x якої дорівнює дійсній частині комплексного числа $a (x = a)$, а ордината y дорівнює уявній частині комплексного числа b $(y = b)$.

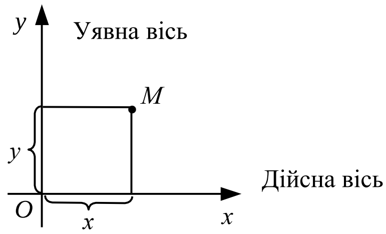


Рис. 1.11

Зобразити на площині комплексні числа:
$3 + 4i$; $-2 + 3i$; $-3 - 2i$; $4 + 0i$; $0 + 2i$.

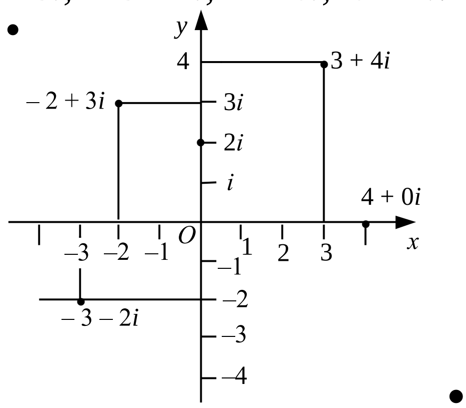


Рис. 1.12

4 ДІЇ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Означення. **Сумою** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$:

$$\boxed{a + bi + (c + di) = a + c + (b + d)i.}$$

Приклади:

1) $(-3 + 5i) + (4 - 8i) = (-3 + 4) + (5 - 8)i = 1 + (-3)i$;

2) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4$.

Означення. **Різницею** двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число $(a - c) + (b - d)i$.

$$\boxed{a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i.}$$

Приклади:

1) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$.

2) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i$.

Означення. **Добутком** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

$\bullet(a + bi)(c + di) = ac + adi + bidi + bci = ac - bd + (ad + bc)i\bullet$

! ***Зауваження***. На практиці не завжди користуються формулою. Можна комплексні числа множити, як двочлени.

1) $(1 - 2i)(3 + 2i) = 3 - 6i + 2i - 4i^2 = 7 - 4i$;

2) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Означення. **Часткою** двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

$$\bullet\boxed{\frac{a+bi}{c+di}}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\boxed{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}\bullet$$

$$\frac{7-4i}{3+2i}=\frac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{21-12i-14i+8i^2}{9+4}=\frac{13-26i}{13}=1-2i.$$

5 МОДУЛЬ ТА АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Означення. **Модулем** комплексного числа $a + bi$ називається вираз $\sqrt{a^2+b^2}$, який позначається r або $|a + bi|$.

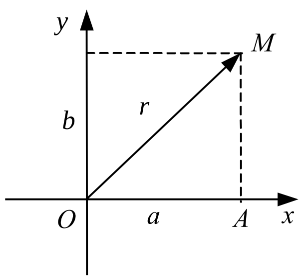


Рис. 1.13

$$r=|3+5i|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}\approx 5{,}83;$$
$$r=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}41;$$
$$r=|0+7i|=7.$$

Означення. Кут φ між віссю Ox і відрізком OM, де точка M зображає комплексне число $a + bi$, називається **аргументом** комплексного числа $a + bi$ (рис. 1.13).

Кожне відмінне від нуля комплексне число має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$. Для числа 0 аргумент не визначений.

Аргумент φ комплексного числа *a* + *bi* визначається формулами:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a};\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\neq 0. \qquad (1)$$

Зауваження. Щоб користуватися цими формулами, потрібно враховувати знаки абсциси та ординати комплексного числа.

Знайти аргумент комплексного числа $-3-3i$.

• За формулою (1) маємо

$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-3}{-3} = 1$, або $\varphi = 45°$, $\varphi = 225°$ і т. ін.

Але кут 45° не є аргументом числа $-3-3i$ (рис. 1.14).

Правильною є така відповідь: 225°; –135°; 585° і т. д. Цей результат дістаємо, враховуючи, що абсциса та ордината комплексного числа є від'ємними, тобто точка M належить чверті III.

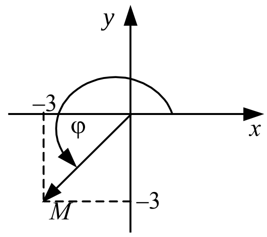


Рис. 1.14

Означення. Значення аргументу, яке належить проміжку $(-\pi; \pi)$, називається **головним**.

Для комплексних чисел $-3-3i$; $2i$; $-5i$ головне значення аргументу дорівнює –135°; 90°; –90°.

Зауваження. Аргумент дійсного додатного числа має головне значення 0°; від'ємного числа 180°. Головні значення аргументу спряжених комплексних чисел мають одну й ту саму абсолютну величину, але протилежні знаки. Наприклад, головні значення аргументу спряжених чисел $-3+3i$ та $-3-3i$ дорівнюють 135° і –135°.

Лекція 2

Тема: Визначники 2 та 3 порядків та їх властивості.

Мета: Вивчення поняття визначників, їх властивостей та методами обчислення. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Визначники 2 і 3 порядків та їх властивості.
2 Обчислення визначників за правилом трикутника.
3 Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: калькулятори

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001, с 3-10.

Теоретичні відомості:

Тема: Визначники 2 та 3 порядків та їх властивості.

1. Визначники 2 і 3 порядків та їх властивості.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (2)$$

називається *визначником третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (2) складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – *побічну діагональ.*

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$
2. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.
   $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$
5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести множником за знак визначника.
   $$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.
   $$\begin{vmatrix} a_1 + ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
7. Визначник, що має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

8. Якщо у визначнику деякий (наприклад, i-й) рядок є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких усі рядки, крім i-го, будуть такі, як у даному визначнику; i-й рядок першого визначника складатиметься з перших доданків, *а* i-й рядок другого визначника складається з других доданків.

2. Обчислення визначників за правилом трикутника.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за *правилом трикутників* (рис. 1): перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

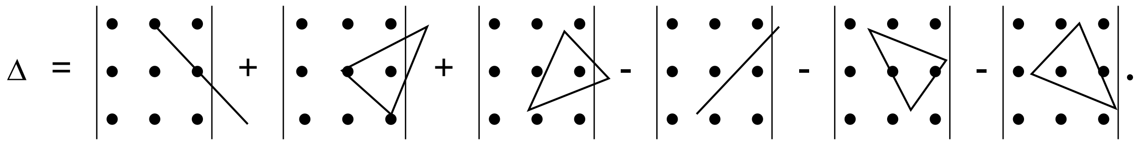


Рис. 1

Визначником квадратної матриці A розміру $n\times n$ називається число

$$D(A)=\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{inv(i_1,\dots,i_n)}\cdot a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} \qquad (3)$$

Сума обчислюється за всіма перестановками $(i_1,\dots,i_n)$. Величина $inv(i_1,\dots,i_n)$ це кількість інверсій перестановки $(i_1,\dots,i_n)$, тобто кількість пар (i_k,i_m) таких, що $i_k>i_m$, проте i_k розташоване лівіше від i_m.

3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Існує простий спосіб розкриття визначника третього порядку — так зване **правило Саррюса**. Допишемо до визначника перший і другий стовпці, а далі перемножимо елементи, що розміщені на одній лінії, як показано (рис. 2):

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Рис. 2

Добуток елементів, які розміщені на лініях, що йдуть згори ліворуч униз праворуч, береться зі знаком «+». Добуток елементів, розміщених на лініях, що йдуть згори праворуч униз ліворуч, береться зі знаком «–».

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання рядка й стовпця, що містять a_{ij}.

Розглянемо визначник третього порядку Δ, заданий формулою (2). Для кожного з дев'яти елементів цього визначника існує свій мінор. Наприклад, мінором елемента a_{12} є визначник $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Його можна дістати з елементів визначника (2), викресливши у ньому перший рядок і другий стовпчик.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. *Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розкладання визначника (2) за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = -10.$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язування.

За правилом Саррюса складемо таблицю

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right.$$
$$\qquad\quad + \;\; + \;\; +$$

і знайдемо значення визначника:

D_3 = 1 · 2 · 2 + 2 · 1 · 3 + 3 · 2 · 1 – 3 · 2 · 3 – 1 · 1 · 1 – 2 · 2 · 2 = –11.

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 .$$

Лекція 3

Тема: Методи обчислення визначників

Мета: Вивчити методи обчислення визначників і властивості визначників. Формувати вміння та навики застосування властивостей визначників при розв'язуванні задач.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Обчислення визначників методом трикутника.
2 Обчислення визначників методом розкладу за рядком (стовпчиком).
3 Розв’язування вправ.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка, робочі зошити

Література:

Дубовик В.П.Юрик І.І. Вища математика.-К.:А.С.К.,2001, С. 6-12.

Теоретичні відомості:

Тема: Методи обчислення визначників

1 Обчислення визначників за правилом трикутника.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за *правилом трикутників* (рис. 1): перші три доданки в правій частині формули (1) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

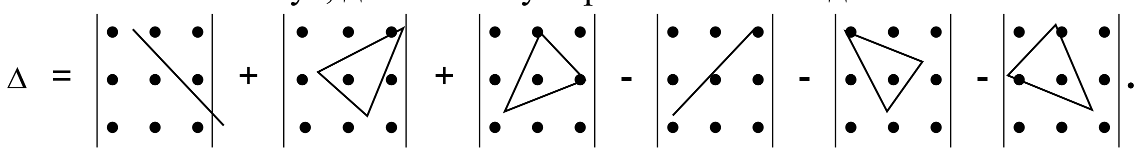


Рис. 1

Визначником квадратної матриці A розміру $n\times n$ називається число

$$D(A)=\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{inv(i_1,\dots,i_n)}\cdot a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} \qquad (1)$$

Сума обчислюється за всіма перестановками $(i_1,\dots,i_n)$. Величина $inv(i_1,\dots,i_n)$ це кількість інверсій перестановки $(i_1,\dots,i_n)$, тобто кількість пар (i_k,i_m) таких, що $i_k>i_m$, проте i_k розташоване лівіше від i_m .

2 Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Існує простий спосіб розкриття визначника третього порядку — так зване **правило Саррюса**. Допишемо до визначника перший і другий стовпці, а далі перемножимо елементи, що розміщені на одній лінії, як показано (рис. 2):

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Рис. 2

Добуток елементів, які розміщені на лініях, що йдуть згори ліворуч униз праворуч, береться зі знаком «+». Добуток елементів, розміщених на лініях, що йдуть згори праворуч униз ліворуч, береться зі знаком «–».

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання рядка й стовпця, що містять a_{ij} .

Розглянемо визначник третього порядку Δ, заданий формулою (2). Для кожного з дев'яти елементів цього визначника існує свій мінор. Наприклад, мінором елемента a_{12} є визначник $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Його можна дістати з елементів визначника (2), викресливши у ньому перший рядок і другий стовпчик.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. *Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розкладання визначника (2) за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = -10.$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язування.

За правилом Саррюса складемо таблицю

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

і знайдемо значення визначника:

$D_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -11.$

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Обчислити визначники методом розкладу:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Лекція 4

Тема: Матриці. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця.

Мета: Вивчення основних понять теорії матриць та матричного методу розв'язування системи лінійних рівнянь. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Основні означення.
2 Дії над матрицями та їх властивості.
3 Обернена матриця.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
калькулятори

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.- с 13-18, 24-25.

Теоретичні відомості:

Тема: Матриці. Дії над матрицями та їх властивості. Обернена матриця.

Матриці. Основні дії над матрицями.

Матрицею називається прямокутна таблиця з чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Матриця $\mathbf{A}$ з елементами a_{ij} розміру $m \times n$ має m рядків та n стовпців і позначається так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця містить однакову кількість рядків і стовпців вона називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*.

Матриця, у якої всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якої всього один стовпець, – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побічну діагональ.*

Якщо в матриці $\mathbf{A}$ поміняти місцями рядки і стовпчики, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці* $\mathbf{A}$ і позначається $\mathbf{A}^T$.

Квадратна матриця, в якої всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею.

Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця $\boldsymbol{O}$ називається нульовою, якщо всі її елементи є нулями:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – матриці одного розміру, то вони вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.

Сумою матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ є матриця $\mathbf{C}$ з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ на число k є матриця $\mathbf{B}$ з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Добутком матриці $\mathbf{A}$ розміру $m \times n$ на матрицю $\mathbf{B}$ розміру $n \times k$ є матриця $\mathbf{C}$, розміром $m \times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij}, який стоїть в *i*-му рядку та *j*-му стовпці матриці $\mathbf{C}$, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці $\mathbf{A}$ на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці $\mathbf{B}$). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків другої матриці $\mathbf{B}$. Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Слід відзначити, що АЕ = ЕА = А.

Будь-якій квадратній матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником цієї матриці* і позначається символом det A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Прямокутна матриця визначника не має.

Виконуються такі властивості додавання та множення матриць:

$E \cdot A = A \cdot E = A$ (властивість множення на одиничну матрицю);

$O \cdot A = A \cdot O = O$ (властивість множення на нульову матрицю);

$k \cdot O = O \cdot k = O$ $A+O = O+A = A$;

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$;

$A+B = B+A$ (комутативна властивість додавання);

$A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативна властивість додавання);

$(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$;

$\alpha(AB) =(\alpha A)B$;

$(A+B)C = AC+BC$; $C(A+B) = CA+CB$.

Приклад. Знайти матрицю $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Кількість стовпців матриці $\mathbf{A}_{2\times2}$ дорівнює кількості рядків матриці $\mathbf{B}_{2\times3}$, тому за означенням маємо

$$\mathbf{C}_{2\times3} = \mathbf{A}_{2\times2}\mathbf{B}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1) \\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця

Нехай $\mathbf{A}$ – деяка квадратна матриця n-го порядку.

Матриця $\mathbf{A}^{-1}$ називається *оберненою* до матриці $\mathbf{A}$, якщо виконується умова

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ *й невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. *Для існування оберненої матриці* $\mathbf{A}^{-1}$ *необхідно і достатньо, щоб матриця* $\mathbf{A}$ *була невиродженою.*

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці $\mathbf{A}$.

Приклад. Знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці $\mathbf{A}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Матриця $\mathbf{A}$ невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (7). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Складемо обернену матрицю

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Лекція 5

Тема: Вектори. Лінійні дії над векторами. Скалярний та векторний добутки векторів.

Мета: Вивчення поняття вектора, дій над векторами, знаходження добутків векторів та їх застосування. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховувати старанність, відповідальність.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Вектори. Основні поняття.
2 Координати векторів і точок. Лінійні дії над векторами.
3 Скалярний добуток векторів.
4 Векторний добуток векторів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Калькулятори, креслярський інструмент

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001, с 32-53.

Теоретичні відомості:

Тема: Вектори. Лінійні дії над векторами. Скалярний та векторний добутки векторів.

Декартові координати у просторі

Три взаємно перпендикулярні осі *x, y, z,* які проходять через деяку точку *O*, утворюють *прямокутну (декартову) систему координат* у просторі. Точка *O* називається *початком координат,* прямі *x, y, z* — *осями координат* (*x* — вісь абсцис, *y* — вісь ординат, *z* — вісь аплікат), а площини *xOy, yOz, zOx* — *координатними площинами.* За одиницю масштабу для всіх трьох осей беруть довільний відрізок.

Відклавши на осях *x, y, z* у додатному напрямі відрізки *OA, OB, OC*, що дорівнюють одиниці масштабу, дістанемо три вектори **OA**, **OB**, **OC**, які називаються *основними векторами,* або *ортами,* і позначаються відповідно **i**, **j**, **k**.

Додатні напрями на осях вибирають так, аби поворот на 90°, який суміщує додатний промінь *Ox* із додатним променем *Oy*, здавався таким, що відбувається проти годинникової стрілки, коли спостерігати його з боку променя *Oz*. Така система координат називається **правою**. Іноді користуються й **лівою** системою координат. У ній зазначений поворот відбувається за годинниковою стрілкою.

Розміщення будь-якої точки *M* у просторі можна визначити трьома координатами так. Через *M* проводимо площини, які паралельні відповідно площинам *yOz, zOx, xOy*. У перетині з осями дістанемо точки M_x, M_y, M_z. Числа *x, y, z,* якими вимірюють відрізки OM_x, OM_y, OM_z у вибраному масштабі, називають **прямокутними (декартовими) координатами** точки *M*, і записують це так: $M(x, y, z)$.

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — дві точки у просторі, то відстань *d* між ними визначається так:

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

Додавання та віднімання векторів

Означення. **Векторною величиною, або вектором** (у широкому розумінні), називається будь-яка величина, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку).

Означення. У геометрії **вектором** (у вузькому розумінні) називається напрямлений відрізок. Напрям відрізка вказується стрілкою. Розрізняють початок і кінець вектора.

Означення. Два вектори називаються **рівними** між собою, якщо кожний із них можна дістати паралельним перенесенням іншого.

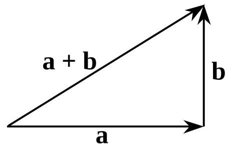
Рівні вектори є паралельними (колінеарними), мають один і той самий напрям і однакову довжину. Довжина вектора **a** називається також **абсолютною величиною**, або **модулем**, вектора і позначається $|\mathbf{a}|$.

Означення. Вектор називається **нульовим** (нуль-вектором), якщо він має нульову довжину, тобто його кінець збігається з початком.

На письмі вектор позначається напівжирним шрифтом.

Щоб знайти суму двох векторів **a** і **b**, сумістимо початок вектора **b** з кінцем вектора **a**.

Означення. **Сумою a + b** векторів **a** та **b** називається вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рис. 3.10).



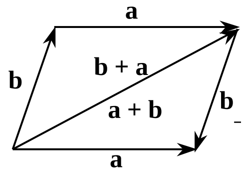


Рис. 3.10 Рис. 3.11

Додавання векторів комутативне, тобто для довільних векторів **a** і **b** справджується рівність (рис. 3.11)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \qquad (1)$$

Додавання векторів асоціативне, тобто для будь-яких векторів **a**, **b**, **c** виконується рівність

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \qquad (2)$$

Цю властивість, що випливає з означення суми векторів, унаочнює рис. 3.12.

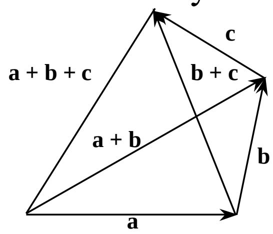


Рис. 3.12

Віднімання векторів — операція, обернена до їх додавання. Різниця **b – a** векторів **a** і **b** являє собою вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рис. 3.13).

$\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$

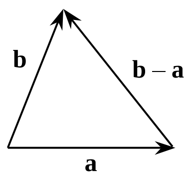


Рис. 3.13

Для будь-яких векторів **a**, **b** виконуються нерівності:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,\ \ |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Розглянемо довільний вектор **a** і вісь x.

Означення. Якщо вектор **a** утворює кут φ з віссю x (рис. 3.14), то **проекцією вектора a** на вісь називається величина

$$\boxed{np_x \mathbf{a} \equiv a_x = |a| \cos\varphi.}. \qquad (3)$$

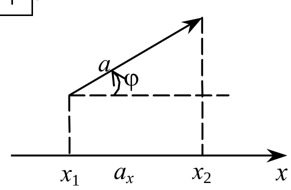


Рис. 3.14

Якщо x_1 — координата проекції початку вектора, а x_2 — координата проекції кінця вектора на вісь x, то

$$\boxed{a_x = x_2 - x_1.} \qquad (4)$$

Нехай вектор a **має початок у точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а кінець — у точці $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді величини**

$$\boxed{a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1}$$

є **проекціями вектора a на осі** *x, y, z*. Проекції вектора однозначно визначають вектор. Тому виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.}$$

Очевидно, що проекція на вісь x суми **a** + **b** векторів **a** та **b** дорівнює сумі проекцій на вісь x векторів **a**, **b** (рис. 3.15).

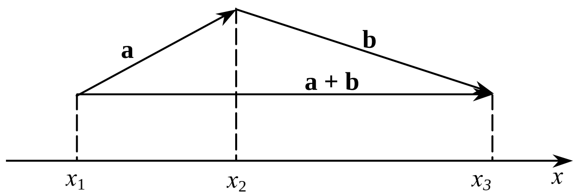


Рис. 3.15

● Справді, виконуються рівності

$$np_x\,\mathbf{a} = x_2 - x_1, \quad np_x\,\mathbf{b} = x_3 - x_2, \quad np_x\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = x_3 - x_1,$$

$$np_x = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = np_x\,\mathbf{a} + np_x\mathbf{b}.$$

Нехай відомі проекції векторів **a** та **b**:

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

Тоді проекція суми векторів **a** + **b** дорівнює сумі відповідних проекцій векторів-доданків:

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y,\ a_z + b_z\}.}$$

Множення вектора на число

Означення. **Добутком вектора a на число** λ називається вектор $\lambda\mathbf{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$. Вектор $\lambda\mathbf{a}$ колінеарний вектору **a**; має однаковий з ним напрям при $\lambda > 0$ і протилежний напрям при $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$ або $\mathbf{a} = 0$, то маємо $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$, тобто добуток є нуль-вектором.

Множення вектора на число має властивість асоціативності та дистрибутивності. Для довільних чисел λ, μ та векторів **a**, **b** справджуються рівності:

$$1)\ \lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a};$$

$$2)\ (\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}; \qquad (1)$$

$$3)\ \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

Останню рівність унаочнює рис. 3.16 ($\lambda > 1$).

Поділ відрізка в заданому відношенні

Дано відрізок у тривимірному просторі, кінцями якого є точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Точка $M(x, y, z)$, узята на прямій, що проходить через точки M_1, M_2, поділяє даний відрізок у **відношенні** λ, якщо

$$\mathbf{M_1M} = \lambda\mathbf{MM_2}.$$

Спроектувавши цю векторну рівність на осі x, y, z, дістанемо рівняння

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Звідси знаходимо координати точки M:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо $\lambda>0$, то M лежить між точками M_1 і M_2. У такому разі говорять, що точка M поділяє відрізок M_1M_2 внутрішнім чином. Якщо $\lambda<0$, то M не належить відрізку M_1M_2. Тоді говорять, що точка M поділяє відрізок M_1M_2 зовнішнім чином.

У частинному випадку, коли точка M є серединою відрізка M_1M_2, тобто при $\lambda = 1$, маємо координати середини відрізка M_1M_2:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Дано дві матеріальні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, маса яких дорівнює відповідно m_1 і m_2. Знайдемо координати центра тяжіння $M(x, y, z)$.

• Точка M поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$. Отже, маємо коефіцієнти точки M:

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2},\ z=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}.$$

Скалярний добуток векторів

Означення. **Скалярним добутком векторів a і b** називається число $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними (рис. 3.18):

$$\boxed{\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi.} \qquad (1)$$

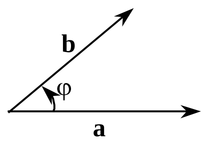


Рис. 3.18

Нехай $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ — проекція вектора **b** на вісь, паралельну вектору **a**. Тоді маємо:

$$\boxed{\begin{gathered} np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|b|\cos\varphi,\quad np_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=|a|\cos\varphi;\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|a|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|b|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \end{gathered}} \qquad (2)$$

Останнє співвідношення означає, що **скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на напрям першого.**

Якщо кут між векторами **a** та **b** гострий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$; якщо тупий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$; якщо прямий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Коли один із векторів **a**, **b** є нульовим, то його можна вважати ортогональним до будь-якого іншого вектора.

Наведемо аналітичні властивості скалярного добутку, що випливають із його означення.

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a};\\ &2)\ \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b});\\ &3)\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2=|a|^2;\\ &4)\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}. \end{aligned}}$$

Перемноживши скалярно вектори **a** та **b**, знайдемо їх скалярний добуток у проекціях на координатні осі:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.} \qquad (3)$$

Звідси маємо:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2,\quad |\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,.}$$

Знаючи проекції векторів **a**, **b**, можна знайти кут між цими векторами:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|a|\cdot|b|},\quad \cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.}$$

Дано просторовий трикутник з вершинами $A(1, 2, -1)$, $B(2, 4, 1)$, $C(3, 0, 0)$. Знайдемо кут при вершині A.

• Розглянемо вектори

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{1,\ 2,\ 2\},\quad \mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{2,\ -2,\ 1\}$$

і з їх скалярного добутку визначимо косинус шуканого кута:

$$\cos\hat{A}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|a|\cdot|b|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-2)+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\,\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{0}{3\cdot 3}=0\,.$$

Оскільки скалярний добуток векторів **a**, **b** дорівнює нулю, то кут при вершині A прямий. •

Векторний добуток векторів

***Означення*. Векторним добутком векторів a та b** називається вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, який задовольняє такі умови:

1) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярний до векторів **a** і **b**;
2) довжина $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах **a** та **b**;
3) якщо звести вектори **a**, **b** та $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ до спільного початку, то спостерігач, який міститься в кінці вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, бачитиме найкоротший поворот від вектора **a** до вектора **b** таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 3.20).

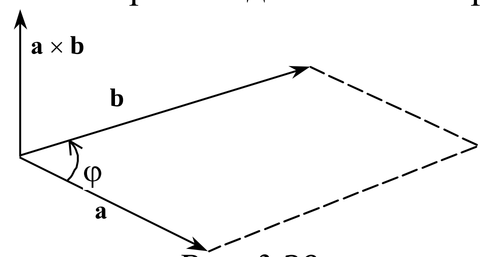


Рис. 3.20

З означення векторного добутку випливають такі його властивості

$$\boxed{\begin{array}{l}1)\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a};\\ 2)\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\varphi;\\ 3)\ \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b});\\ 4)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.\end{array}}$$

Векторний добуток векторів **a** та **b** можна подати у вигляді визначника:

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}\qquad (1)$$

Знайдемо площу просторового трикутника з вершинами $A(1, 2, 1)$, $B(4, 3, 2)$, $C(2, 4, 4)$.

• Позначаючи вектори

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{3,1,1\},\quad \mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{1,2,3\},$$

обчислюємо їх векторний добуток:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k},\quad |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{1^2+8^2+5^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$

Площа S трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах **a**, **b**:

$$S=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\frac{3}{2}\sqrt{10}\,.$$

Лекція 6

Тема: Види рівнянь прямої на площині. Види рівнянь площин

Мета: Вивчення рівнянь прямої на площині, рівнянь площин, кутів між прямими, площинами. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховувати старанність, відповідальність.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Види рівнянь прямої на площині.
2 Кут між прямими. Умова паралельності та перпендикулярності прямих.
3 Відстань від точки до прямої.
4 Види рівнянь площин.
5 Кут між площинами. Умова паралельності та перпендикулярності площин.
6 Відстань від точки до площини.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
креслярський інструмент

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С.119-144.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.- С. 76-88.

Теоретичні відомості:

Тема: Види рівнянь прямої на площині. Види рівнянь площин

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Нехай на площині задано пряму у прямокутній системі координат *x, y*. Кут φ між віссю *Ox* і цією прямою називається **кутом нахилу прямої** до осі. Тангенс кута нахилу $k = \mathrm{tg}\varphi$ називається **кутовим коефіцієнтом** розглядуваної прямої. Якщо ця пряма перетинає вісь *Oy* у точці *B* з координатами (0, *b*), то число *b* називається **початковою ординатою**. Візьмемо довільну точку *M*(*x*, *y*) на прямій (рис. 3.22).

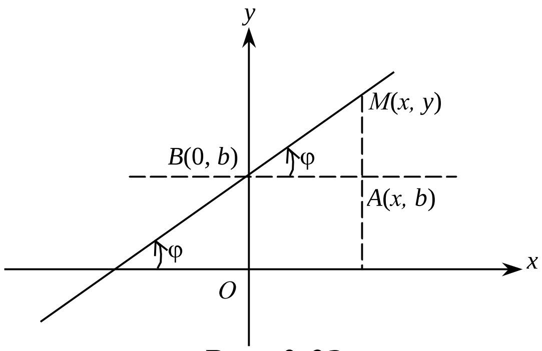


Рис. 3.22

З прямокутного трикутника *MAB* знаходимо рівняння прямої

$$\frac{y-b}{x} = \mathrm{tg}\varphi,$$

яке можна подати у вигляді

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = kx + b, & \text{де} \\ k = \mathrm{tg}\varphi. & \end{array}} \qquad (1)$$

Якщо розглядувана пряма паралельна осі *Oy*, то φ = 0,5π і tgφ не існує. При цьому пряма має рівняння виду *x* = *a* (рис. 3.23).

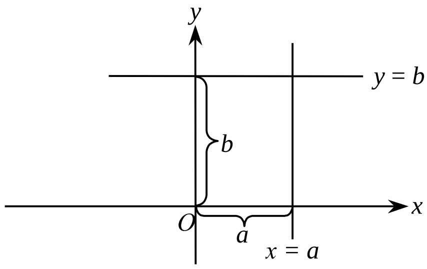


Рис. 3.23

Координати *x*, *y* будь-якої точки *M*(*x*, *y*), що належить прямій, задовольняють рівняння (1). Якщо пряма (1) проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то справджується рівність

$$y_1 = kx_1 + b,$$

Віднімаючи почленно цю рівність від рівності (1), дістаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1).} \qquad (2)$$

Зі зміною кутового коефіцієнта *k* в рівнянні (2) утворюються різні прямі, що проходять через точку $M_1(x_1, y_1)$. Рівняння (2) називається **рівнянням пучка (в'язки) прямих** (рис. 3.24).

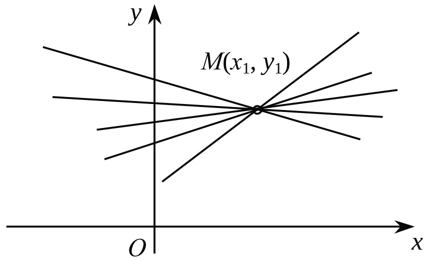


Рис. 3.24

Нехай дано дві різні точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2\ (x_2, y_2)$, де $x_2 \neq x_1$. З рівняння (2) випливає вираз для кутового коефіцієнта прямої, що проходить через точки M_1, M_2:

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}.} \qquad (3)$$

Підставляючи в (3) рівняння (2), знаходимо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2\ (x_2, y_2)$:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (4)$$

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(4, 1)$, $M_2(2, 3)$.

• Згідно з (4) маємо:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-4}{2-4}, \quad y = -x+5, \quad \operatorname{tg}\varphi = -1, \quad \varphi = 135°.$$

Ця пряма утворює кут 135° з віссю Ox. •

Якщо задано вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.}$$

Вектор **s** називається **напрямним вектором прямої**.

Щоб побудувати графік прямої, достатньо знати дві її різні точки і через них провести пряму. Якщо пряма перетинає осі координат у точках $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то її можна записати рівнянням

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,} \qquad (5)$$

яке називається **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

Запишемо рівняння прямої

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

у вигляді (5).

• Значенню $y_1 = 0$ відповідає $x_1 = 3$. При $x_2 = 0$ знаходимо $y_2 = 2$. Отже, шукане рівняння прямої подається у вигляді

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Пряма перетинає вісь x у точці з координатою $x = 3$, а вісь y — у точці з координатою $y = 2$. •

КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

Розглянемо дві прямі, які задано рівняннями

$$y = k_1 x + b_1, \ y = k_2 x + b_2. \qquad (1)$$

Якщо прямі паралельні, то вони мають (2) однакові кути нахилу: $k_1 = k_2$.

Дві прямі збігаються, якщо $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

Якщо прямі взаємно перпендикулярні, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ і

$$k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\frac{1}{k_1}.$$

Рівність

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (3)$$

є умовою перпендикулярності двох прямих виду (1).

Якщо прямі не паралельні, то вони перетинаються в точці $M(x, y)$, координати якої є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1, \\ y = k_2 x + b_2. \end{cases}$$

Нехай θ — кут між цими прямими (рис. 3.25).

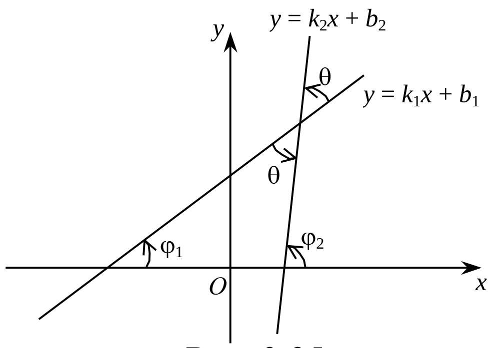


Рис. 3.25

Згідно з рис. 3.25 маємо: $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$ (зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним). Отже,

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

Формулу $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ застосовують для знаходження кута між двома прямими, заданими рівняннями виду (1). (4)

У трикутнику з вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(2, 4)$ знайти кут α при вершині A, а також рівняння висоти CD і медіани BM (рис. 3.25).

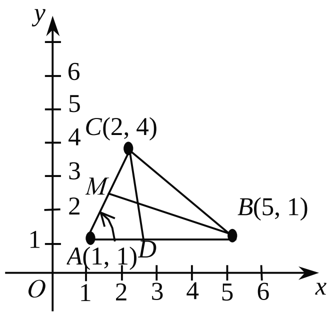


Рис. 3.25

Скориставшись (3), знайдемо кутові коефіцієнти прямих AB, AC:

$$k_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4},\ k_2=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{4-1}{2-1}=3;$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{3-\frac{1}{4}}{1+3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{11}{7},\quad \boxed{\alpha=\mathrm{arctg}\frac{11}{7}.}$$

Пряма CD перпендикулярна до прямої AB. Її кутовий коефіцієнт $k_3=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{4}$, а відповідне рівняння

$$y-4=-4(x-2).$$

Точка M поділяє відрізок AC пополам. Отже,

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}.$$

Через точки $B(5, 2)$, $M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ проводимо пряму m і згідно з (4) дістаємо:

$$\frac{y-2}{\frac{5}{2}-2}=\frac{x-5}{\frac{3}{2}-5},\ \text{або}\ \boxed{y=-\frac{1}{7}x+\frac{19}{7}}. \bullet$$

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Розглянемо на площині прямокутну систему координат x, y і знайдемо рівняння прямої, коли відомий вектор її нормалі $\mathbf{n}=\{A,B\}$ і задано точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої прямої (рис. 3.27).

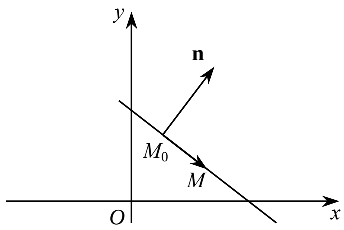


Рис. 3.27

За умовою вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}=\{x-x_0,\ y-y_0\}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}=\{A,B\}$. Тому їх скалярний добуток $\mathbf{n}\mathbf{M}_0\mathbf{M}=0$. Звідси маємо рівняння

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,} \qquad (1)$$

або

$$\boxed{\begin{aligned}&Ax+By+C=0,\\&C=-Ax_0-By_0.\end{aligned}} \qquad (2)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої**.

На відміну від рівняння виду (1) змінні x, y входять до рівняння (2) рівноправно. Рівняння (1) завжди можна подати у вигляді (2).

Рівняння прямої (2) можна записати у вигляді ($y = kx + b$) лише за умови $B \neq 0$.

Коефіцієнти A, B при x, y у загальному рівнянні прямої є проекціями на координатні осі вектора її нормалі $\mathbf{n}$.

Справджується теорема.

***Теорема 1*. Будь-яка пряма на площині може бути задана лінійним рівнянням виду (2). Кожне лінійне рівняння виду (2), де $A^2 + B^2 > 0$, визначає деяку пряму.**

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше при виведенні рівняння (1). Доведемо друге твердження. Візьмемо довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 0.$$

Оскільки коефіцієнти при x, y не перетворюються одночасно на нуль, завжди знайдуться значення $x = x_0$, $y = y_0$, при яких виконується рівність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Віднімаючи ці рівняння почленно, дістаємо рівність

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \qquad (3)$$

За допомогою векторів

$$\mathbf{n} = \{A, B\},\quad \mathbf{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0\}$$

рівність (3) можна записати у вигляді $\mathbf{nM_0M} = 0$.

Як бачимо з рис. 3.27, вектор $\mathbf{M_0M}$ тоді і тільки тоді буде перпендикулярним до ненульового вектора $\mathbf{n}$, коли точка $M(x, y)$ лежить на прямій, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до цього вектора. Звідси випливає рівняння (1), що визначає деяку пряму. Отже, теорему доведено. ♦

Нехай x, y — координати довільної точки на площині. Пряма (2) поділяє всю площину на дві півплощини. В одній півплощині виконується нерівність $Ax + By + C > 0$, а в іншій — нерівність $Ax + By + C < 0$. На самій прямій маємо: $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо частинні випадки рівняння (2):

якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі x; якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі y; якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат; якщо $A = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю x; якщо $B = 0$, $C = 0$, то пряма збігається з віссю y.

Нагадаємо, що пряма проходить перпендикулярно до вектора $\mathbf{n} = \{A,\ B\}$.

КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Нехай дано точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на прямій і вектор $\mathbf{s} = \{l,\ m,\ n\}$, паралельний цій прямій. Складемо рівняння прямої. Нехай $M(x,\ y,\ z)$ — довільна точка на прямій. Вектор $\mathbf{M_0M}$ паралельний вектору $\mathbf{s}$, який називається **напрямним вектором прямої**.

За умовою паралельності дістанемо рівняння

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}, \qquad (1)$$

яке називається **канонічним рівнянням прямої**.

Пряму можна визначити як результат перетину будь-яких двох площин із наведених далі трьох:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m};\quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};\quad \frac{z - z_0}{n} = \frac{x - x_0}{l}.$$

Останні рівняння є рівняннями **проекцій прямої** відповідно на координатні площини

Oxy, Oyz, Ozx.

Якщо дано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на прямій, то за напрямний вектор $\mathbf{s}$ можна взяти $\mathbf{s} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$. Тоді рівняння прямої набере вигляду

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \qquad (2)$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1, 2, 3)$ і $M_2(3, 5, 7)$.

• З рівняння (2) маємо:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4} \ \bullet$$

Якщо відомі канонічні рівняння (1), то з них можна вивести **параметричні рівняння прямої**. Нехай t — коефіцієнт пропорційності векторів $\mathbf{M_0M}$ і $\mathbf{s}$, тобто $\mathbf{M_0M} = t\mathbf{s}$.

З рівнянь

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

маємо рівняння

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

які називаються **параметричними рівняннями прямої**.

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, точка $M(x, y, z)$, де x, y, z визначаються рівнянням (3), пробігає всю пряму.

Скориставшись позначеннями

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},\ \mathbf{s} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k},$$

рівняння прямої можна записати у *векторній формі*

$$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{s} = 0.}$$

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дві прямі задано їх загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Точку перетину $M(x, y)$ цих прямих знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь (1), оскільки координати x, y точки M задовольняють одночасно обидва ці рівняння.

Кут θ між даними прямими дорівнює куту між їх нормалями $\mathbf{n}_1 = \{A_1,\ B_1\}$, $\mathbf{n}_2 = \{A_2,\ B_2\}$ (рис. 3.28).

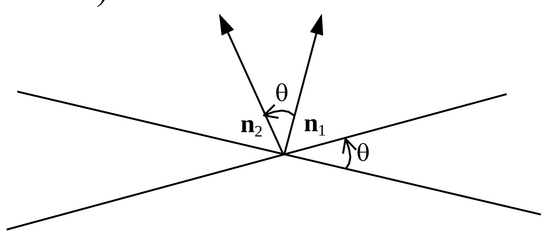


Рис. 3.28

Отже, маємо такі залежності:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \text{ — умова паралельності прямих.}} \qquad (2)$$

Якщо прямі збігаються, то їх коефіцієнти пропорційні:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.}$$

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0 \text{ — умова перпендикулярності прямих.}} \qquad (3)$$

Скориставшись формулою скалярного добутку векторів, знайдемо кут θ:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.} \qquad (4)$$

Розглянемо спосіб побудови прямих, що проходять через точку перетину двох даних прямих.

Теорема 2. **Якщо прямі (1) не паралельні, то рівняння**

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad \textbf{(5)}$$

визначає пучок прямих, які проходять через точку перетину прямих (1). Вибором λ можна дістати будь-яку пряму, що проходить через точку перетину прямих (1), крім другої прямої.

Доведення. При кожному значенні λ рівняння (5), що є лінійним, визначає деяку пряму. Припустимо, що коефіцієнти при *x, y* перетворюються на нуль:

$$A_1+\lambda A_2=0;$$
$$B_1+\lambda B_2=0.$$

Тоді виконується рівність

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}=0, \text{ або } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

а це означає, що прямі (1) паралельні.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ є точкою перетину прямих (1):

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

Звідси випливає, що

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0,$$

тобто пряма (5) проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Візьмемо тепер довільну точку площини $M_1(x_1, y_1)$ і виберемо λ так, щоб пряма (5) проходила через точку M_1. Для цього має виконуватися рівність

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0,$$

з якої завжди можна визначити λ за умови

$$A_2x_1+B_2y_1+C_2\neq 0.$$

Іншими словами, точка M_1 не повинна лежати на другій прямій (1). Отже, і справді вибором параметра λ можна дістати будь-яку пряму, що проходить через точку перетину прямих (1), за винятком другої прямої (1).

Теорему доведено. ♦

Маємо рівняння сторін трикутника:

$$x-2y+2=0(AB);$$

$$2x-y-1=0\ (AC);$$
$$x+y-5=0\ (BC).$$

Знайдемо рівняння його висоти, проведеної з вершини C.

● Складемо рівняння пучка променів, які проходять через вершину C:

$$2x-y-1+\lambda(x+y-5)=0.$$

Далі за умовою (3) перпендикулярності прямих до AB маємо:

$$(2+\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\ (-2)=0.$$

Звідси знаходимо значення $\lambda = 4$ і рівняння висоти $2x + y - 7 = 0$. ●

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Дано загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

і точку $M_1(x_1, y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої (1). Візьмемо точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій.

Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$ на вектор нормалі $\mathbf{n}=\{A,B\}$ (рис. 3.29).

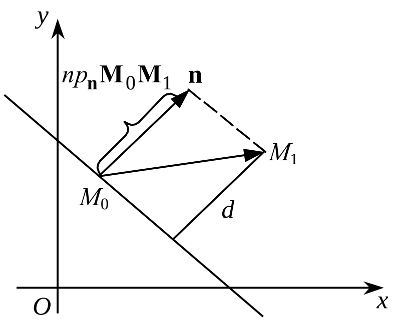


Рис. 3.29

Записуємо аналітичний вираз для шуканої відстані:

$$d=\left|np_{\mathbf{n}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right|=\frac{\left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right|}{|\mathbf{n}|}=\frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо:

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.} \qquad (2)$$

Обчислити відстань d від точки $M_1(5, 3)$ до прямої $3x + 4y + 3 = 0$.

- За формулою (2) знаходимо

$$d=\frac{\left|3\cdot 5+4\cdot 3+3\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6. \quad ●$$

Нехай маємо загальні рівняння двох прямих, що перетинаються:

$$\begin{aligned}&A_1x+B_1y+C_1=0,\\&A_2x+B_2y+C_2=0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Якщо точка $M(x, y)$ лежить на бісектрисі кутів, утворених прямими (4), то вона однаково віддалена від цих прямих, тобто виконується рівність:

$$\frac{\left|A_1x+B_1y+C_1\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{\left|A_2x+B_2y+C\right|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (5)$$

Знайти рівняння бісектриси AD трикутника з вершинами $A(1, 1)$, $B(6, 3)$,

$C(2, 5)$ (рис. 3.31).

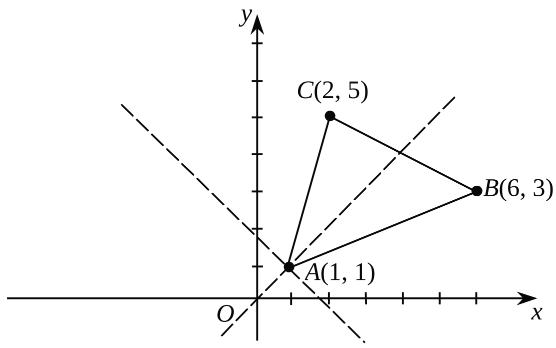


Рис. 3.31

● **Згідно з (5) записуємо рівняння двох бісектрис:**

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\pm\frac{4x-y-3}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{29}}-\frac{4x-y-3}{\sqrt{17}}=0,$$

або

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{29}}+\frac{4x-y-3}{\sqrt{17}}=0. \qquad (7)$$

Ці прямі на рис. 3.31 зображено пунктиром. Вони взаємно перпендикулярні. Щоб знайти бісектрису трикутника ABC, підставимо координати точок $B(6, 3)$, $C(2, 5)$ у рівняння (6) і (7). Оскільки точки B, C лежать по різні боки від шуканої бісектриси, то в результаті підставляння координат точок $B(6, 3)$, $C(2, 5)$ у зазначені рівняння дістанемо числа різних знаків.

Справді, для рівняння (6) маємо:

$$\frac{2\cdot 6-5\cdot 3+3}{\sqrt{29}}-\frac{4\cdot 6-31-3}{\sqrt{17}}<0,\ \frac{2\cdot 2-5\cdot 5+3}{\sqrt{29}}-\frac{4\cdot 2-5\cdot 1-3}{\sqrt{17}}<0$$ (числа однакових знаків);

для рівняння (7):

$$\frac{2\cdot 6-5\cdot 3+3}{\sqrt{29}}+\frac{4\cdot 6-3\cdot 1-3}{\sqrt{17}}>0,\ \frac{2\cdot 2-5\cdot 5+3}{\sqrt{29}}+\frac{4\cdot 2-5\cdot 1-3}{\sqrt{17}}<0$$ (числа різних знаків).

Отже, рівняння (7) визначає шукану бісектрису трикутника ABC. ●

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Виведемо рівняння площини у тривимірному просторі, узявши точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій площині і вектор $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$, перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на площині. Ця точка належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\mathbf{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{n}$ (рис. 3.49).

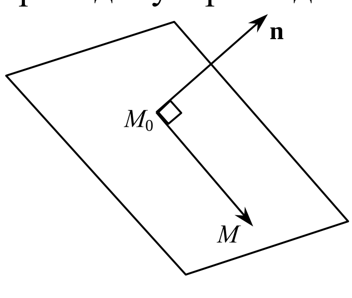


Рис. 3.49

Умова перпендикулярності вектора

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

до вектора $\mathbf{n}$ подається у вигляді

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (1)$$

Дістали рівняння площини, що проходить через задану точку $\boldsymbol{M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)}$ перпендикулярно до заданого вектора $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$.

Якщо позначимо сталу величину

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0, \qquad (2)$$

то рівняння (1) набере вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням площини**.

Рівняння (3) є лінійним відносно координат x, y, z.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Якщо одна з координат x, y, z не входить до рівняння поверхні $f(x, y, z) = 0$, то зі зміною цієї координати вид поверхні не змінюється. Така поверхня буде циліндричною із твірною, що паралельна осі, яка відповідає зазначеній координаті.

Дамо інтерпретацію загального рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

в разі, якщо один або кілька його коефіцієнтів перетворюються на нуль.

1. $A = 0$ — площина паралельна осі x.
2. $B = 0$ — площина паралельна осі y.
3. $C = 0$ — площина паралельна осі z.
4. $D = 0$ — площина проходить через початок координат.
5. $A = 0$, $B = 0$ — площина перпендикулярна до осі z.
6. $A = 0$, $C = 0$ — площина перпендикулярна до осі y.
7. $B = 0$, $C = 0$ — площина перпендикулярна до осі x.
8. $A = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь x.
9. $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь y.
10. $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через вісь z.
11. $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, y.
12. $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі x, z.
13. $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ — площина проходить через осі y, z.

У загальному випадку, коли жодний із коефіцієнтів рівняння не перетворюється на нуль, рівняння площини можна звести до вигляду

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \qquad (1)$$

Площина, що визначається рівнянням (1), перетинає осі координат у точках $x = a$, $y = b$, $z = c$. Тому рівняння (1) називається **рівнянням площини у відрізках на осях.**


Зведемо рівняння площини

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

до вигляду (1). Для цього поділимо обидві його частини на 6:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1.$$

Отже, площина перетинає осі координат у точках $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$. •

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ТОЧКИ

Нехай дано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Знайдемо рівняння площини, яка проходить через ці три точки. Записавши рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$Ax_k + By_k + Cz_k + D = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

складемо систему:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y) + C(z_2 - z_1) = 0;$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

Оскільки ця однорідна система рівнянь має ненульовий розв'язок A, B, C, то її визначник дорівнює нулю:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \qquad (1)$$

1. Рівняння (1) є рівнянням **площини, що проходить через три точки.**

♦ Справді, рівняння (1) є лінійним і, відповідно, визначає деяку площину. Точки $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ лежать на цій площині, оскільки при підставлянні $x = x_k, y = y_k, z = z_k$ $(k = 1, 2, 3)$ у визначник (1) дістанемо визначник з нульовим рядком або двома однаковими рядками.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, 4)$, $M_3(4, 3, 1)$.

• Рівняння (1) набирає вигляду:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 1 & 4 - 1 \\ 4 - 1 & 3 - 1 & 1 - 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння

$$6x - 9y + 4z - 1 = 0 . \bullet$$

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ

Дано площину

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ поза нею. Знайдемо відстань від точки M_1 до площини. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на площині. Тоді відстань d від точки M_1 до площини дорівнює модулю проекції вектора $\mathbf{M_0M_1}$, на нормаль до площини (рис. 3.50).

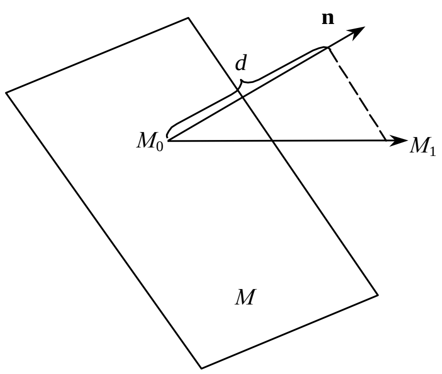


Рис. 3.50

Отже,

$$d = \frac{|\mathbf{n} \cdot M_0 M_1|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки

$$-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D,$$

то

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \qquad (1)$$

Знайдемо відстань d від точки $M_1(1, 2, 3)$ до площини, заданої рівнянням $2x - y + 2z + 3 = 0$.

• Згідно з (1) маємо:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3. \quad \bullet$$

Рівняння площини, записане у вигляді

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,}$$

де знак перед радикалом протилежний знаку D, називається **нормальним рівнянням площини**. Якщо $D = 0$, то вибір знака неістотний.

Щоб знайти відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини, слід підставити координати цієї точки в нормальне рівняння площини і знайти модуль здобутої величини.

Величина

$$f = \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

називається **відхиленням точки M(x, y, z) від площини**.

Модуль відхилення дорівнює відстані від точки $M(x, y, z)$ до площини. Якщо $f < 0$, то точка $M(x, y, z)$ і початок координат лежать по один бік від розглядуваної площини; якщо $f > 0$, — по різні боки; якщо $f = 0$, то M лежить на цій площині.

Коли маємо дві площини, які перетинаються й подаються рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \;\; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то бісектральні площини визначаються рівнянням

$$\boxed{\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \qquad (2)$$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Нехай дано дві площини, які визначаються загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \;\; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Розглянемо вектори нормалей до кожної з площин:

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \mathbf{n}_1 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Кут θ **між площинами визначається кутом θ** між векторами $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$. Отже, справджується рівність

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (1)$$

Умова перпендикулярності площин така:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (2)$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3)$$

Дві площини збігаються**, якщо виконується рівність**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (4)$$

У разі виконання умови (4) рівняння однієї площини можна дістати з рівняння іншої площини множенням на сталий множник.

Нехай дано три площини

$$A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Вони перетинаються в одній точці у тому і тільки тому разі, коли визначник

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо $\Delta = 0$, то площини можуть мати спільну пряму, коли система рівнянь (5) має нескінченну множину розв’язків, або не мати жодної спільної точки, коли система (5) не має розв’язків.

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

1. Щоб знайти відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, можна через точку M_0 провести площину, перпендикулярну до прямої, знайти точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої та площини і обчислити відстань d між точками M_0, M_2 (рис. 3.53).

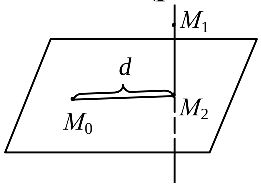


Рис. 3.53

Знайдемо відстань від точки $M_0(1, 2, -1)$ до прямої

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

• Проведемо через точку M_0 площину, перпендикулярну до прямої

$$2(x - 1) + 1 \cdot (y - 2) + (-1)(z + 1) = 0.$$

Складемо параметричне рівняння прямої

$$x = 1 + 2t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - t$$

і знайдемо точку перетину прямої та площини:

$$t = 1,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0,\ z_2 = 1.$$

Отже, $d = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{3}.$

Обчислимо відстань від точки $M_0(1, 2, -1)$ до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

• За формулою (1) дістаємо:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3}. \quad \bullet$$

Лекція 7

Тема: Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола

Мета: Вивчення понять про криві другого порядку, їх графіки, рівняння. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховувати старанність, відповідальність.

Методи: Словесний, практичний, наочний

План:

1 Поняття лінії другого порядку.
2 Коло.
3 Еліпс.
4 Гіпербола.
5 Парабола.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
креслярський інструмент

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С.145-170.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК,2001.- С. 97-114.

Теоретичні відомості

Тема: Криві другого порядку

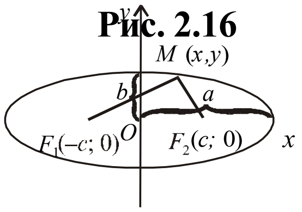
Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.(2.19)$$

Рівняння (2.19) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс. *Означення.* Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

Рис. 2.16



На рис. 2.16 зображено F_1 $(-c,\ 0)$, F_2 $(c,\ 0)$ — фокуси еліпса, M $(x,\ y)$ — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a,$ причому $2c < < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.20)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2.20). Якщо $x = 0$, $y = \pm\ b$, тобто точки $(0,\ b)$ і $(0,\ -\ b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm\ a$ і відповідно $(a,\ 0)$; $(-\ a;\ 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.20) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 2.16 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0,\ 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 2.17, з якого бачимо, що точки F_1 $(-\ c,\ 0)$ і F_2 $(c,\ 0)$ — фокуси гіперболи, точка $M\ (x,\ y)$ — точка визначеної множини. Тоді $\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a,\ a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

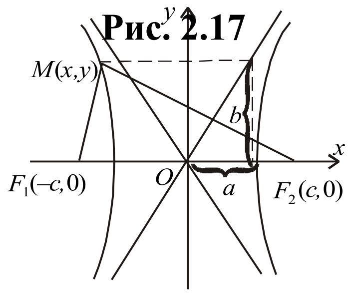


Рис. 2.17

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь *Оу*. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a,\ 0)$; $(a,\ 0)$ — точки перетину з віссю *Ох*. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm\frac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей *Ох* і *Оу*, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 2.17.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі *Ох*.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі *Оу* і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі *Оу* і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: **якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стале й дорівнює ексцентриситету, тобто** $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола*, *якщо* $\varepsilon > 1$.

Парабола. *Означення*. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

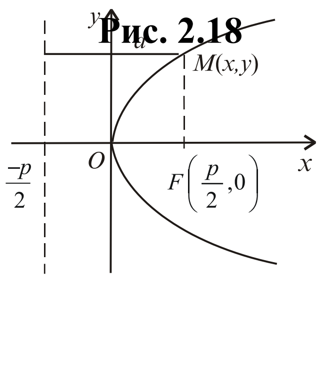


Рис. 2.18

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 2.18):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},\ \text{або}\ y^2 = 2px$$

— канонічне рівняння параболи, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі *Ох*, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 2.18.

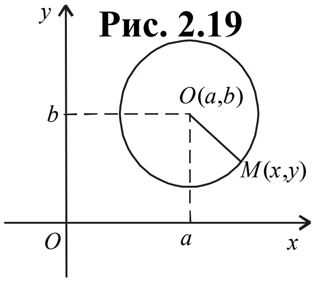


Рис. 2.19

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис. 2.19).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (2.21)$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Лекція 8

Тема: Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання

Мета: ознайомити студентів із задачами, які приводять до поняття похідної; вивчити поняття похідної, вияснити її механічний та геометричний зміст. Вивчити правила диференціювання та таблицю похідних. Розвиток логічного мислення, пам'яті, уваги. Виховувати працелюбність, прививати бажання мати якісні глибокі знання, культуру мовного спілкування в ході бесіди

Методи: словесний, наочний, практичний

План:

1 Поняття похідної функції.
2 Геометричний зміст похідної функції.
3 Механічний зміст похідної функції.
4 Правила диференціювання.
5 Таблиця похідних.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Таблиця похідних, олівець

Література:

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К.:АСК, 2001.-С.191-209.
Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С. 205-210.

Теоретичні відомості

Тема: Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання

Поняття похідної — фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні, значення електричного струму та ін.) приводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної. Отже, наша найближча мета — познайомитися з поняттям похідної, навчитися знаходити похідні елементарних функцій та застосовувати поняття похідної до дослідження функцій, вивчення деяких фізичних явищ, до вивчення геометричних понять.

Задачі що призводять до поняття похідної:

1. Нехай матеріальна точка *M* рухається прямолінійно по закону $s = f(t)$ (рис. 20).

В момент часу t_0 вона зайняла положення M_0 і пройшла шлях $S_0 = f(t_0)$. Знайдемо швидкість точки в момент часу t_0.

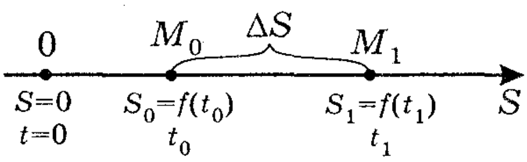


Рис. 20

Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу Δt, починаючи з моменту t_0, точка перемістилася на відстань Δs і зайняла положення M_1. Тоді
$t_1 = t_0 + \Delta t$, $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$.

За проміжок часу Δі матеріальна точка проходить шлях
$\Delta x = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Середня швидкість υ руху на проміжку M_0M_1 дорівнює: $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точніша, якщо проміжок Δt буде зменшуватися.

Таким чином, можна вважати, якщо Δt наближається до нуля, то середня швидкість $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ буде наближатися до швидкості в момент часу t_0.

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, в момент часу t_0 називається границя середньої швидкості при умові, що Δt наближається до нуля.

$$\upsilon_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Числа Δt, Δs називаються відповідно приростом часу, приростом шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, є границя відношення приросту шляху Δs до відповідного приросту часу Δt, коли приріст часу наближається до нуля.

Приклад 1.

Точка рухається прямолінійно по закону $s(t) = 5t^2 + t + 3$ (s — шлях в метрах, t – час в секундах). Знайдіть швидкість точки:

а) в довільний момент t_0; б) в момент часу t = 2 с.

Розв'язання

а) 1) нехай значення аргументу t_0 одержало приріст Δt, тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$.

2) Знайдемо відповідний приріст шляху

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 3 - (5 t_0^2 + t_0 + 3) = 5 t_0^2 + 10 t_0 \Delta t + 5\Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 3 - 5t_0^2 - t_0 - 3 = 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t.$$

3) Знайдемо відношення приросту шляху до приросту часу (середню швидкість):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta t(10t_0 + 1 + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t_0 + 1 + 5\Delta t$$

4) Знайдемо границю відношення приросту шляху до приросту часу (середньої швидкості): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(10t_0 + 1 + 5\Delta t\right) = 10t_0 + 1$

Отже, миттєва швидкість точки в довільний момент часу t_0 дорівнює $10t_0 + 1$.
Отже, при заданому законі руху *s(t)* миттєва швидкість *v(t)* в довільний момент часу *t* обчислюється по формулі $v(t) = 10t + 1$.

б) Якщо t = - 2 с, то маємо $v(2) = 10 \cdot 2 + 1 = 21 \left(\frac{м}{с}\right)$;

Відповідь: а) $10t + 1$; б) $21\frac{м}{с}$.

Поняття дотичної до кривої.

В курсі геометрії ви познайомились з означенням дотичної до кола: дотичною до кола називається пряма, яка лежить в площині кола і має з колом лише одну спільну точку. Таке означення дотичної не може бути перенесено на всі криві (парабола, синусоїда, гіпербола тощо).

Наприклад, вісь *OY* має тільки одну спільну точку з графіком функції $y = x^3$, проте її не можна вважати дотичною до кубічної параболи в точці *0* (рис. 21).

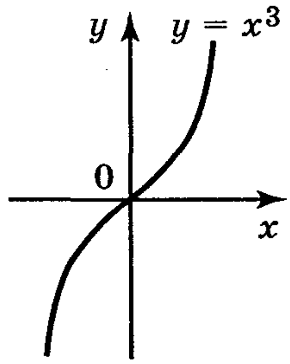


Рис. 21

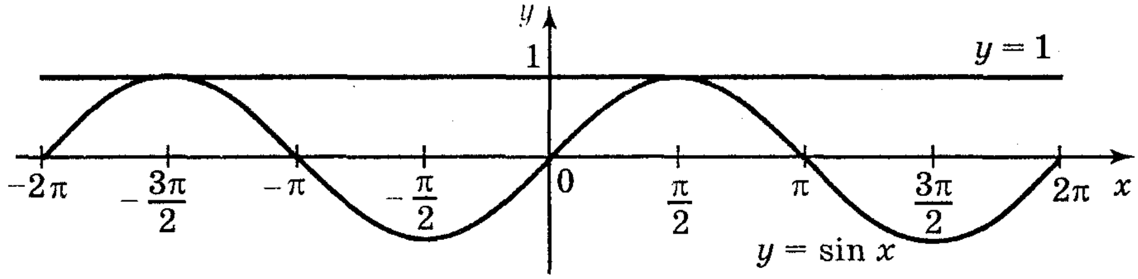


Рис. 22

Пряма $y = 1$ і синусоїда $y = \sin x$ мають безліч спільних точок (рис. 22), проте пряму $y = -1$ вважають дотичною до синусоїди.

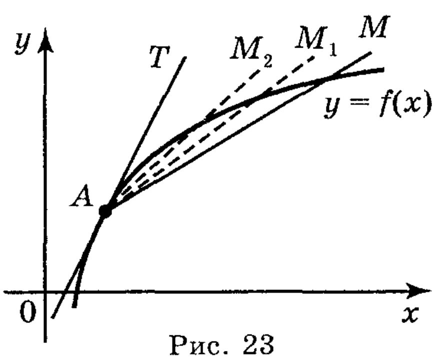


Рис. 23

Для введення означення дотичної до кривої розглянемо функцію *y = f(x)* і її графік — криву лінію (рис. 23). Нехай точки *A і M* належать графіку функції *y = f(x),* проведемо січну *AM.*

Зафіксуємо точку А. Нехай точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А. При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А і в граничному положенні при наближенні точки *M* до точки А січна займе положення прямої АТ. Пряму АТ називають дотичною до даної кривої в точці А.

Дотичною АТ до графіка функції $y = f(x)$ в точці А називається граничне положення січної *AM,* коли точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А.

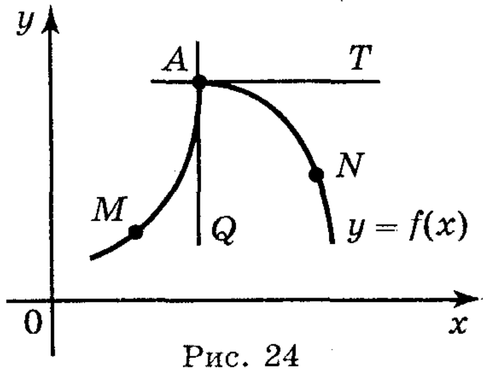


Рис. 24

Слід мати на увазі, що не в усякій точці кривої можна провести до неї дотичну. На рис. 24 зображено криву $y = f(x)$, яка в точці А не має дотичної, бо якщо точка *M* буде наближатися до точки А по лівій частині кривої, то січна MA займе граничне положення AQ.

Якщо точка *N* буде наближатися по правій частині кривої, то січна *NA* займе граничне положення *AT.* Одержуємо дві різні прямі AQ і AT, це означає, що в точці А до даної кривої дотичної не існує.

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0; y_0)$.

Дотична — це пряма, а положення прямої $y= kx + b$, яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = \text{tg}\ \alpha$, де α — кут між прямою і додатнім напрямом осі *OX* (рис. 25).

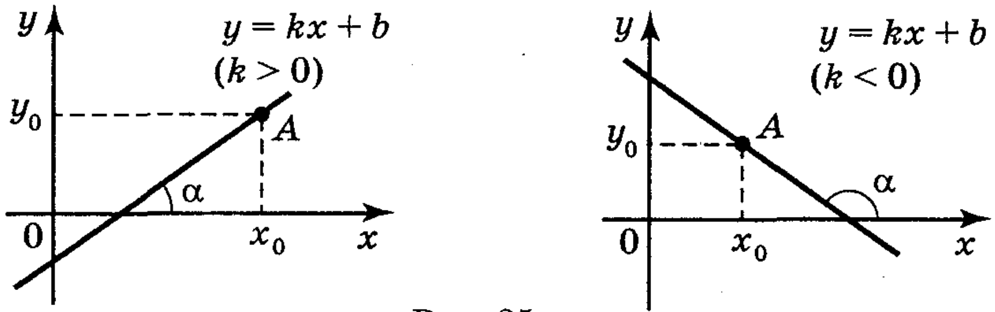


Рис. 25

Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число *k*.

Нехай в точці $A(x_0; y_0)$ (рис. 26) кривої $y = f(x)$ існує дотична, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

1) Надамо аргументу x_0 приросту Δx, одержимо нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.

2) Знайдемо відповідний приріст функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

3) Знайдемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Із трикутника *AMK* маємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\angle MAK$. Так як $\angle MAK = \varphi$ — куту нахилу січної *AM з* додатним напрямом осі *OX,* то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\ \varphi$.

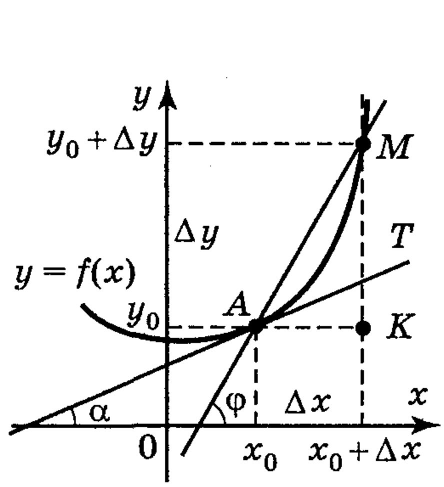


Рис. 26

4) Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ і точка M буде переміщуватися по кривій, наближаючись до точки А.

При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А, а величина кута φ буде змінюватися зі зміною Δx. Граничним положенням січної *AM* при $\Delta x \to 0$ буде дотична AT, яка утворює з додатним напрямом осі OX деякий кут, величину якого позначимо через α.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ — кутовий коефіцієнт дотичної.

Вправа

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2 - 4x$ в точці з абсцисою $x = 2{,}5$.

Відповідь: $k = 1$.

Ці дві задачі розв'язуються одним і тим самим способом, який складається з таких етапів:

1) незалежній змінній x надаємо приросту Δx;
2) знаходимо приріст залежної змінної — Δy;
3) знаходимо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) знаходимо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ використовується при розв'язуванні і інших важливих задач (зокрема, про швидкість протікання хімічних реакцій, знаходження густини неоднорідного стержня, теплоємності тіла при нагріванні, сили змінного струму в провіднику та інш.), тому доцільно всебічно вивчити властивості цієї границі, зокрема, вказати способи її обчислення.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_o даного проміжку, надамо значенню x_o довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_o+\Delta x$ належала даному проміжку, тоді

1) Обчислимо в точці x_o приріст $\Delta y = \Delta f(x_o)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x_o+ \Delta x) - f(x_o);$$

2) Складемо відношення: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta x \to 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_o і позначають $f\,'(x_o)$ або y' (читається еф штрих від x_o або y штрих).

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_o називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f\,'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

*Приклад 1***.** Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 + 2$ в точці x_o.

Розв'язання

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 3(x_o + \Delta x)^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 =$$

$= 3x_0^2 + 6x_o\Delta x + 3\Delta x^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 = 6x_o\Delta x + 3\Delta x^2 = \Delta x(6x_o + 3\Delta x).$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x.$$

Знайдемо похідну даної функції в точці x_0:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(6x_0 + 3\Delta x) = 6x_o + 3 \cdot 0 = 6x_o.$$

Відповідь: $6x_o$.

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $f(x) = kx + b$ (k і b постійні) у точці x_o.

Розв'язання

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - kx_o - b = kx_o + k\Delta x - kx_o = k\Delta x.$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

Отже, $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k$, або $(kx + b)' = k$.

Відповідь: k.

З другого прикладу можна зробити висновок, що похідна лінійної функції є постійна величина, яка дорівнює кутовому коефіцієнту прямої. Якщо в формулі $(kx + b)' = k$ покласти $k = 0$, $b = C$, де C — довільна постійна, то одержимо, що $C' = 0$, тобто похідна постійної дорівнює нулю.

Якщо в формулі покласти $k = 1$, $b = 0$, то одержимо $x' = 1$.

Функцію, яка має похідну в точці x_o, називають диференційованою в цій точці.

Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають диференційованою на цьому проміжку. Операція знаходження похідної називається диференціюванням.

Нехай D_1 — множина точок, у яких функція $y = f(x)$ диференційована. Якщо кожному $x \in D_1$ поставити у відповідність число $f'(x)$, то одержимо нову функцію з областю визначення – D_1. Цю функцію позначають f':

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила диференціювання

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхня сума диференційована в цій точці і $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$. або коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

Доведення

Розглянемо функцію $y = f(x) + g(x)$. Зафіксуємо x_o і надамо аргументу приросту Δx. Тоді

$$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = f(x_o + \Delta x) + g(x_o + \Delta x) - f(x_o) - g(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) + + g(x_o + \Delta x) - g(x_o) = \Delta f + \Delta g,$$

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Наслідки

а) Похідна різниці дорівнює різниці похідних. Нехай $y(x) = f(x) - g(x)$, тоді $f(x) = y(x) + g(x)$ і

$$f'(x) = y'(x) + g'(x), \text{ звідси } y'(x) = f'(x) - g'(x).$$

б) Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, тобто

$$(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))' = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x)$$

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхній добуток також — диференційована функція в цій точці і

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

або коротко говорять: похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну другої функції.

Доведення

Розглянемо функцію $y = f(x) \cdot g(x)$. Зафіксуємо x_o і надамо аргументу приросту Δx, тоді

1) $\Delta y = f(x_o + \Delta x) \cdot g(x_o + \Delta x) - f(x_o) \cdot g(x_o)$.

Оскільки $f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta f$, $g(x_o + \Delta x) = g(x_o) + \Delta g$, то

$\Delta y = (f(x_o) + \Delta f) \cdot (g(x_o) + \Delta g) - f(x_o) \cdot g(x_o) = f(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_o) + + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_o) \cdot g(x_o) = f(x_o) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_o) + \Delta f \cdot \Delta g$.

2) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) \cdot \Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= f(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$

$= f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g'(x_o) + f'(x_o) \cdot g'(x_o) \cdot 0 = f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g(x_o)$.

Отже, $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x).\ g(x) + f(x).\ g'(x)$.

Наслідки

а) Постійний множник можна винести за знак похідної: $(cf(x))' = cf'(x)$.

Дійсно, $(cf(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c\, f'(x) = c\, f'(x)$.

б) Похідна добутку декількох множників дорівнює сумі добутків похідної кожного із них на всі останні, наприклад:

$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$.

Теорема. Якщо функції f(x) і g(x) диференційовані в точці x і $g(x) \neq 0$, то функція y = $\frac{f(x)}{g(x)}$ диференційована в цій точці і $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^I = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Доведення

Формулу похідної частки можна вивести, скориставшись означенням похідної. Проте це зробити можна простіше.

Нехай $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, тоді $f(x) = y(x) \cdot g(x)$. Знайдемо похідну функції $f(x)$, скориставшись теоремою про похідну добутку, $f'(x) = y'(x)g(.x) + y(x)\, g'(x)$. Виразимо з цієї формули $y'(x)$:

$y'(x)=\dfrac{f'(x)-y(x)\cdot g'(x)}{g(x)}$ і підставимо замість *y(x)* значення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, тоді будемо мати:

$$y'(x)=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)}{g(x)}=\frac{\left(f'(x)-\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)\right)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Отже, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Правила диференціювання

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$

$$(Cf(x))'=C\cdot f'(x);$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Лекція 9

Тема: Умови монотонності та екстремуму функції. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Мета: вивчити достатню умову монотонності функції та правило дослідження функції на монотонність. Розвиток логічного мислення, пам'яті, уваги. Виховувати працелюбність, прививати бажання мати якісні глибокі знання, культуру мовного спілкування в ході бесіди

Методи: словесний, наочний

План:

1 Достатня умова монотонності функції.
2 Критичні точки функції.
3 Правило дослідження функції на монотонність

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
таблиця похідних

Література:

Афанасьєва О.М. Математика (підручник для студентів ВНЗ I-II р.а. технічних спеціальностей).-К.: Вища школа, 2001.-С. 136-137

Теоретичні відомості

Тема: Умови монотонності та екстремуму функції. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a;\ b)$ і $x_0 \in (a;\ b)$. Кажуть, що $f(x)$ **зростає** в точці x_0, якщо існує окіл точки x_0, в якому $f(x) < f(x_0)$ для $x < x_0$, а для $x > x_0$

$$f(x) > f(x_0).$$

Аналогічно за означенням $f(x)$ **спадає** в точці $x_0 \in (a;\ b)$, якщо існує її окіл, в якому $f(x) > f(x_0)$ для $x < x_0$, а $f(x) < f(x_0)$ для $x > x_0$.

Теорема 2 **(достатня ознака зростання і спадання функції в точці). Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in (a;\ b)$ і $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0.**

Доведення. Проведемо доведення для випадку, коли $f'(x_0) > 0$. Оскільки $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, то існує окіл точки x_0, в якому $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ для $x \neq x_0$. Звідси випливає, що в цьому околі $f(x) < f(x_0)$ для $x < x_0$, тобто $f(x)$ зростає в точці x_0. Аналогічно доводиться випадок, коли $f'(x_0) < 0$.

Теорема 3 **(достатня ознака зростання і спадання функції на проміжку). Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$, то вона (спадає) на цьому інтервалі.**

ОЗНАКИ МОНОТОННОСТІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо деякі ознаки монотонності і строгої монотонності диференційовних на проміжку функцій.

Теорема 4 **(ознака монотонності). Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$ і диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$. Тоді:**

1) для того щоб функція $f(x)$ була монотонно зростаючою на проміжку $[a;\ b]$, необхідно і достатньо, аби виконувалася нерівність $f'(x) \geq 0$ для всіх $x \in (a;\ b)$;

2) для того щоб функція $f(x)$ була монотонно спадною на проміжку $[a;\ b]$, необхідно і достатньо, аби виконувалась нерівність $f'(x) \leq 0$ для всіх $x \in (a;\ b)$.

Доведення. Проведемо доведення першого пункту теореми.

Необхідність. Нехай функція $f(x)$ неперервна і неспадна на $[a;\ b]$ і має скінченну похідну $f'(x)$ в інтервалі $(a;\ b)$. Покажемо, що $f'(x) \geq 0$ для $x \in (a;\ b)$. За умовою для будь-якого $x \in (a;\ b)$ існує $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Крім того, для $t > x$ із $(a;\ b)$ $f(t) \geq f(x)$ і, отже, для $t > x$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0,$$

тому

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x) \geq 0,$$

що і доводить необхідність.

Достатність. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$ і $f'(x) \geq 0$ для будь-яких $x \in (a;\ b)$. Задамо довільні x_2 і x_1 із $[a;\ b]$ за умови $x_2 > x_1$. За теоремою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, звідки $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Отже, для x_1 і x_2 із $(a; b)$ при $x_2 > x_1$ дістаємо $f(x_2) \geq f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ зростає.

Теорема 5 **(ознака строгої монотонності). Нехай функція** $f(x)$ **неперервна на проміжку** $[a; b]$ **і диференційовна в інтервалі** $(a; b)$. **Для того щоб функція** $f(x)$ **була зростаючою (спадною) на проміжку** $[a; b]$, **необхідно і достатньо виконання двох умов:**

1) $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ **для будь-якого** $x \in (a; b)$;

2) рівність $f'(x) = 0$ **не повинна виконуватися в жодному інтервалі, що лежить в** $[a; b]$.

Теорема 6 **(достатня ознака строгої монотонності). Нехай функція** $f(x)$ **неперервна на проміжку** $[a; b]$ **і диференційовна в інтервалі** $(a; b)$. **Якщо** $f'(x) > 0$ **для всіх** $x \in (a; b)$, **то** $f(x)$ **зростає на** $[a; b]$, **якщо ж** $f'(x) < 0$ **для всіх** $x \in (a; b)$, **то** $f(x)$ **спадає на** $[a; b]$.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

1. Знайти нулі функції $f'(x)$, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ (якщо вони є), і розбити інтервал $(a; b)$ за допомогою знайдених коренів $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, на інтервалі $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, …, $(x_{k-1}; x_k)$, $(x_k; b)$.

2. Визначити знак похідної на кожному із таких інтервалів. Якщо при цьому виявиться, що на двох сусідніх інтервалах $(x_{i-1}; x_i)$ $(x_i; x_{i+1})$ похідна $f'(x)$ має один і той самий знак, то функція строго монотонна в інтервалі $(x_{i-1}; x_{i+1})$. Наприклад, якщо $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростаюча, якщо $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадна.

Строга монотонність за теоремою 6 зберігається, якщо до частинного інтервалу приєднати його кінці, на яких за умовою функція неперервна. Якщо $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ неперервна, а в інтервалі $(a; b)$ похідна $f'(x)$ не перетворюється на нуль, то на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ буде строго монотонною, а саме при $f'(x) > 0$ — зростаючою, при $f'(x) < 0$ — спадною.

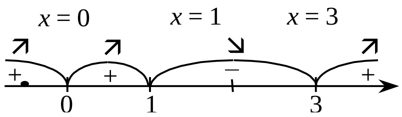
Знайти інтервали зростання і спадання функції

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 15.$$

● Маємо

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3) = 0,$$

звідки



Похідна $f'(x)$ неперервна для $x \in (-\infty; +\infty)$ і перетворюється на нуль лише в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, тому вона в інтервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$ і $(3; +\infty)$ зберігає знак. Оскільки $f'(-1) > 0$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, $f'(2) < 0$, $f'(5) > 0$, $f'(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$, $f'(x) > 0$, $x \in (0; 1)$, $f'(x) < 0$, $x \in (1; 3)$, $f'(x) > 0$, $x \in (3; +\infty)$.

Тому функція $f(x)$ зростає на інтервалах $(-\infty; 0)$; $(0; 1)$; $(3; +\infty)$ і спадає на інтервалі $(1; 3)$.

ПОНЯТТЯ МАКСИМУМУ І МІНІМУМУ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ (ЛОКАЛЬНИЙ ЕКСТРЕМУМ)

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ b]$ і x_0 — внутрішня точка проміжку: $x_0 \in (a;\ b)$.

Означення. Функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум, якщо існує окіл точки x_0, що для всіх x, $x \neq x_0$, цього околу виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$. Саме значення $f(x_0)$ називатимемо **максимумом (локальним максимумом) функції** $f(x)$ в точці x_0 і позначатимемо $\max f(x) = f(x_0)$.

Функція $f(x)$ в точці x_0 має *мінімум*, якщо існує окіл точки x_0, що для всіх x ($x \neq x_0$), які належать цьому околу, буде виконуватись нерівність $f(x) \geq f(x_0)$. При цьому саме значення $f(x_0)$ називатимемо *мінімумом (локальним мінімумом)* функції $f(x)$ в точці x_0 і позначатимемо $\min f(x) = f(x_0)$.

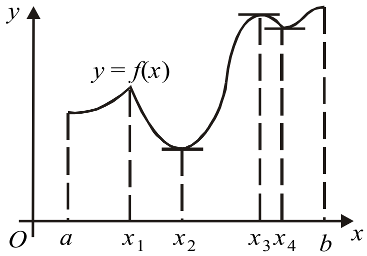


Рис. 5.31

Далі, якщо для $x \neq x_0$ у даному околі точки x_0 $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, функція $f(x)$ має *строгий максимум (строгий мінімум)*.

Максимум і мінімум функції в точці об'єднує спільний термін — **екстремум (локальний екстремум)** функції в точці.

НЕОБХІДНА УМОВА ЕКСТРЕМУМУ. СТАЦІОНАРНІ І КРИТИЧНІ ТОЧКИ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$.

Означення. Точки інтервалу $(a;\ b)$, в яких похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль ($f'(x) = 0$), називаються *стаціонарними точками* функції $f(x)$ в інтервалі $(a;\ b)$.

Геометрична інтерпретація. Кожна стаціонарна точка $x_0 \in (a;\ b)$ функції $f(x)$, диференційовної в інтервалі $(a;\ b)$, характеризується тим, що дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0;\ f(x_0))$ паралельна осі абсцис, оскільки кутовий коефіцієнт цієї дотичної $k = f'(x_0) = 0$.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і диференційовна на проміжку $(a;\ b)$ за винятком, можливо, скінченного числа точок, в яких функція не має похідної.

Теорема 1. **Для того щоб точка x_0 була точкою екстремуму функції, визначеної в околі цієї точки, необхідно, щоб похідна функції в цій точці дорівнювала нулю ($f'(x) = 0$) або функція була недиференційовна в цій точці.**

Доведення випливає з теореми Ферма.

Означення. Для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a;\ b]$ і диференційовної на інтервалі $(a;\ b)$ (за винятком, можливо, скінченного числа точок, де не існує похідної $f'(x)$ в цьому інтервалі), точки, де її похідна дорівнює нулю або не існує, називатимемо *критичними її точками* на проміжку $[a;\ b]$, або точками, *«підозрілими» на екстремум* функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$.

Знайти критичні точки функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 15, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

● Маємо $f'(x) = x^2 - 5x + 6$. Розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, дістанемо $x = 2$ і $x = 3$. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна, то критичними точками будуть лише стаціонарні, тобто точки $x = 2$ і $x = 3$.

ДОСТАТНІ УМОВИ СТРОГОГО ЕКСТРЕМУМУ

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Будемо говорити, що похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак із плюса на мінус, якщо існує такий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, що для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) > 0$, а для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$. Аналогічно $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак із мінуса на плюс, якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, що для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) < 0$, а для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$.

Нарешті, $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінює знака, якщо для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x)$ зберігає один і той самий знак (буде або додатна, або від'ємна).

***Теорема 2*. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:**

1) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий максимум;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20.$$

● Маємо

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3).$$

Із рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо дві стаціонарні точки: $x = 2$ і $x = 3$. При переході через точку $x = 2$ похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, отже, за теоремою 2 функція $f(x)$ в точці $x = 2$ має максимум: $\max f(x) = f(2) = 8$.

Аналогічно знайдемо, що в точці $x = 3$ функція $f(x)$ має мінімум: $\min f(x) = f(3) = 7$.

***Теорема 3*. Нехай функція $f(x)$ має похідні до n-го *порядку включно в околі* x_0, причому функція $f^{(n)}(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, але $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тоді*:**

1) якщо n парне ($n \geq 2$), то функція $f(x)$ в точці x_0 має строгий екстремум, причому мінімум — при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і максимум — при $f^{(n)}(x_0) < 0$;

2) якщо n непарне, то функція $f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.

Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5. \bullet$$

● Знаходимо похідну $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$. Рівняння $f'(x) = 0$ має одну стаціонарну точку $x = 1$, тому $f'(1) = 0$. Далі,

$$f''(x) = 6x - 6,\ f''(1) = 0,\ f'''(x) = 6,\ f'''(1) = 6 \neq 0.$$

Отже, $f'(1) = f''(1) = 0$, але $f'''(1) \neq 0$. За теоремою в стаціонарній точці $x = 1$ функція $f(x)$ екстремуму не має.

***Теорема 4*. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі стаціонарної точки x_0, а в самій стаціонарній точці має похідну другого порядку. Тоді:**

1) якщо $f'''(x_0) > 0$**, то функція** $f(x)$ **в точці** x_0 **має мінімум;**

2) якщо $f'''(x_0) < 0$**, то функція** $f(x)$ **в точці** x_0 **має максимум;**

3) якщо $f''(x_0) = 0$**, то в точці** x_0 **може бути екстремум, а може і не бути.**

Доведення. Нехай $f'''(x_0) > 0$, тоді, ураховуючи, що x_0 — стаціонарна точка ($f'(x_0) = 0$), дістаємо

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 .$$

Оскільки границя виразу $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ в точці x_0 додатна, то існує окіл точки x_0, що для всіх $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а для $x > x_0$ $f'(x) > 0$ із вказаного околу. У точці x_0 функція $f(x)$ неперервна, тому за теоремою 2 в точці x_0 функція має мінімум.

Аналогічно доводиться теорема про максимум функції $f(x)$ в точці x_0, якщо $f'''(x_0) < 0$.

Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^6$.

- Маємо $f'(x) = 6x^5$. Стаціонарна точка одна: $x = 0$.

1) За теоремою 2 при переході через стаціонарну точку $x = 0$ похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс. Отже, у точці $x = 0$ функція $f(x)$ має строгий мінімум.

2) За теоремою 3 маємо $f''(x) = 30x^4$, $f'''(x) = 120x^3$, $f^{(4)}(x) = 360x^2$, $f^{(5)}(x) = 720x$, $f^{(6)}(x) = 720$, причому $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, але $f^{(6)}(0) = 720 > 0$. Оскільки число 6 парне, то за теоремою 3 в точці $x = 0$ функція $f(x)$ має строгий мінімум.

3) Оскільки $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, то теорема 4 не дає відповіді про екстремум функції в стаціонарній точці $x = 0$.

4) Дослідження функції на екстремум можна виконати і без використання диференційовності. Оскільки $|x| > 0$ для $x \neq 0$ і $|0| = 0$, то і $x^6 = 0$ для $x = 0$, звідки функція $f(x) = x^6$ у точці $x = 0$ має строгий мінімум.

Цей приклад показує, що при дослідженні функції $f(x)$ на екстремум треба звернути увагу на вид самої функції, щоб обрати найбільш раціональний спосіб розв’язування конкретної задачі.

НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ (АБСОЛЮТНИЙ ЕКСТРЕМУМ)

1. Знаходження найбільших і найменших значень функції на проміжку. Розглянемо деякі випадки знаходження найбільших і найменших значень функцій на проміжку, коли функція неперервна і диференційовна на всьому проміжку за винятком точок, де в неї немає скінченної похідної.

I. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і має скінченне число стаціонарних точок.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ **на проміжку** $[a; b]$.

1. Знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, $x \in (a; b)$, тобто стаціонарні точки (якщо вони є).

2. Обчислити значення функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$ і в усіх стаціонарних точках (не обов’язково виясняти, чи буде в них екстремум).

3. На підставі порівняння всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Знайти найбільше і найменше значення функції
$f(x) = 5x + \frac{1}{5x}$ на проміжку [0,01; 100].

● У даному випадку похідна $f'(x) = \frac{25x^2 - 1}{5x}$ в інтервалі [0,01; 100] має тільки один корінь — $x = 0{,}2$. Обчислимо значення функції в стаціонарній точці $x = 0{,}2$ і на кінцях проміжку [0,01; 100]:

$$f(0{,}2) = 2,\ f(0{,}01) = f(100) = 100{,}01.$$

Звідси

$$\max_{x\in[0{,}01;100]} f(x) = 100{,}01, \quad \min_{x\in[0{,}01;100]} f(x) = 2\,.$$

2. Нехай функція *f*(*x*) неперервна на проміжку [*a*; *b*], диференційовна в інтервалі (*a*; *b*) за винятком скінченного числа точок і має скінченне число стаціонарних точок.

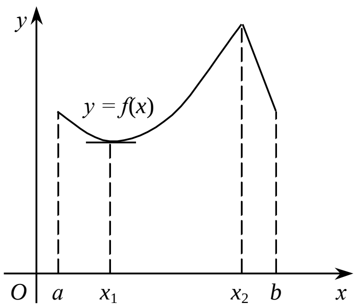


Рис. 5.32

У цьому випадку критичними точками функції *f*(*x*) в інтервалі (*a*; *b*) будуть не тільки стаціонарні точки, а й точки, в яких не існує похідної (рис. 5.32). Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції застосовується алгоритм випадку 1, лише з тією різницею, що потрібно обчислити додатково значення функції в точках, де відсутня похідна.

Знайти найбільше і найменше значення функції
$y = \left(x^4 - 1\right)^{2/3}$ на проміжку [0; 2].

• Після знаходження похідної функції і розв'язання рівняння $f'(x) = 0$ матимемо, що критичною точкою буде тільки точка $x = 1$. Знаходимо значення функції *f*(*x*) на кінцях проміжку і в критичній точці:

$$f(0) = 1,\ f(2) = 15^{\frac{2}{3}},\ f(1) = 0.$$

Звідси

$$\min_{x\in[0;2]} f(x) = f(1) = 0,\ \max_{x\in[0;2]} f(x) = f(2) = 15^{\frac{2}{3}}.$$

3. Функція *f*(*x*) неперервна — диференційовна в інтервалі (*a*; *b*) за винятком, можливо, скінченного числа точок і має скінченне число стаціонарних точок.

У цьому випадку функція *f*(*x*) може не мати найбільшого або найменшого значення на проміжку [*a*; *b*]. Наприклад, функція $f(x) = x^2$ в інтервалі (0; 1) не має ні найбільшого, ні найменшого значення; функція $f(x) = \sin x$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ має найбільше значення, що дорівнює 1, і найменше значення, що дорівнює – 1; функція $f(x) = (x - 12)^2 + 30$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ не має найбільшого значення, але має найменше значення, що дорівнює 30; функція $f(x) = 5x^2$ на проміжку (0; 1] не має найменшого значення, але має найбільше значення, що дорівнює 5.

Дослідження функції *f*(*x*), що задовольняє умовам 3 на проміжку [*a*; *b*], на найбільше і найменше значення можна виконати так, як і у випадку 2 для проміжку [*a*; *b*], з тією лише різницею, що коли немає *f*(*a*), то його замінюють граничним значенням $\lim_{x\to a} f(x) = A$, а коли немає *f*(*b*), то його також замінюють граничним значенням $\lim_{x\to b} f(x) = B$. Потім з порівняння значень функції *f*(*x*), як у випадку 2, включаючи граничні значення A (якщо немає $f(a)$) і B (якщо немає $f(b)$), найбільшим значенням виявиться граничне, то воно і буде найбільшим значенням функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Якщо найбільшим значенням функції виявиться граничне, то $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ не має найбільшого значення. Аналогічно досліджується питання про найменше значення $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$ в інтервалі $(0; 2)$.

• Оскільки $f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 15^{\frac{2}{3}}$, то найбільшим із цих значень буде $15^{\frac{2}{3}}$, яке є граничним, отже, функція не має найбільшого значення в інтервалі $(0; 2)$. Найменшим значенням буде $f(1) = 0$, отже, $f(1) = 0$ є найменшим значенням функції $f(x)$ в інтервалі $(0; 2)$.

Лекція 10

Тема: Первісна та її властивість. Невизначений інтеграл та його властивості

Мета: вивчення понять первісної та невизначеного інтеграла, основних формул інтегрування та їх викоритання при розв′язуванні вправ

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Первісна та її властивість.
2 Невизначений інтеграл та його властивості.
3 Таблиця основних невизначених інтегралів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С. 247-253.

Теоретичні відомості

Тема: Первісна та її властивість. Невизначений інтеграл та його властивості

1. При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати *s(t)* матеріальної точки. Миттєва швидкість *v*(*t*) дорівнює похідній функції *s(t)*, тобто *v(t)* = *s'(t)*.

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості *v(t)* руху точки знайти пройдений нею шлях *s(t),* тобто знайти таку функцію s(і), похідна якої дорівнює *v*(*t*). Функцію s(*t*) таку, що *s'(t)* = *v(t)*, називають первісною функції *v(t).* Наприклад, якщо *v{t)* = *gt,* то *s(t)* = $\frac{gt^2}{2}$ є первісною функції *v(t),* оскільки $g'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^I = \frac{g \cdot 2t}{2} = gt = v(t)$.

Функція *F(x)* називається *первісною* функції *f(x)* на деякому проміжку, якщо для всіх *x* із цього проміжку виконується рівність: *F'(X)* = *f(x).*

Наприклад, функція *F(x)* = sin *x* є первісною функції *f(x)* = *cos x* для *x* є *R,* бо (sin *x)'* = cos *x;* функція *F(x)* = *tg x* є первісною функції *f(x)* = $\frac{1}{cos^2 x}$, бо *F'(x)* = *(tgx)'* = $\frac{1}{cos^2 x}$ = *f(x)* для всіх *x*, крім *x* = $\frac{\pi}{2}$ + *πn, n* є *Z.*

Виконання вправ

Покажіть, що функція *F(x)* є первісною функції *f(x)* для вказаних значень *x:*

1. *F(x)* = *kx*, *f(x)* = *k, x* є R.
2. *F(x)* = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, *f(x)* = x^n, *x* є (0; $+\infty$), $n \neq -1$.
3. *F(x)* = $ln|x|$, *f(x)* = $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
4. *F(x)* = e^x, *f(x)* = e^x, *x є R.*
5. *F(x)*= $\frac{a^x}{\ln a}$, *f(x)*=a^x, *x є R.*
6. *F(x)* = *-cos x*, *f(x)* = *sin x*, *x є R.*
7. *F(x)* = *-ctg x*, *f(x)* = $\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$.

Розглянемо функцію *f(x)* = x^2. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції *f(x)*.

Дійсно, $F_1^I(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)^I = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$, $F_2^I(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^I = x^2 + 0 = x^2 = f(x)$,

$F_3^I(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 5\right)^I = x^2 - 0 = x^2 = f(x)$.

Взагалі будь-яка функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$ + С, де С — постійна, є первісною функції x^2. Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначне.

Теорема 1. Нехай функція *F(x)* є первісною для *f(x)* на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної С функція *F(x) + C* також є первісною для функції *f(x)*.

Доведення

Оскільки *F(x)* — первісна функції *f(x)*, то *F'(x) = f(x)*.

Тоді *(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)*, а ця рівність означає, що *F(x) + C* є первісною для функції *f(x)*.

Теорема 2. Нехай функція *F(x)* є первісною для *f(x)* на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції *f(x)* на цьому проміжку може бути записана у вигляді *F(x)* + *C,* де С — деяка стала (число).

Доведення

Нехай *F(x)* і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції *f(x),* тобто $F^I(x) = f(x)$, $F_1^I(x) = f(x)$. Похідна різниці $g(x) = F(x) – F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x) = F_1^I(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Якщо $g'(x) = 0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції *y* = *g(x)* у кожній точці цього проміжку паралельна осі *OX.* Тому графіком функції *y* = *g(x)* є пряма, яка паралельна осі *OX,* тобто *g(x)* = С, де *C* — деяка стала. Із рівностей *g(x) = C,* $g(x) = F_1(x) - F(x)$ випливає, що $F_1(x) – F(x) = C$, або $F_1(x) = F(x) + C$.

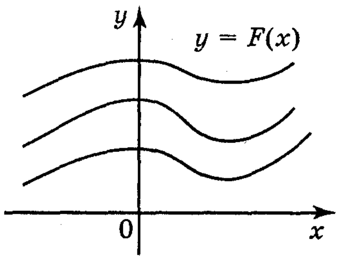


Рис. 87

Теореми 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції *f* одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі *OY* (рис. 87).

Нехай функція *f* має на деякому проміжку первісну. Сукупність усіх первісних для функції *f(x)* на проміжку називають невизначеним інтегралом цієї функції і позначають $\int f(x)dx$. функцію *f(x)* називають *підінтегральною функцією.*

З доведених теорем випливає, що $\int f(x)dx$ = *F{x) + C,* де *F(x)* — яка-небудь первісна для функції *f(x)* на даному проміжку, С — довільна стала (її називають сталою інтегрування). Наприклад, функція sin *x* є первісною для функції cos *x* на проміжку $(-\infty; +\infty)$, тому можна записати, що

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (таблицю невизначених інтегралів) для функцій, похідні яких відомі (таблиця 9).

Таблиця 9 Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x+C$	$\int dx = x + C$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$

Для даної функції *f(x)* знайдіть первісну, графік якої проходить через задану точку A:

а) $f(x) = x^4$; A(-1; 0); б) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, A(0; 1); в) $f(x) = \sin x$, $A(\pi; 2)$;

г) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $A\left(\frac{\pi}{4};-1\right)$; д) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $A\left(\frac{\pi}{6};0\right)$.

Відповідь: а) $\frac{x^5+1}{5}$; б) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+1$; в) $-\cos x+1$; г) $tg\, x - 2$; д) $-ctgx + \sqrt{3}$.

Математичний диктант.

Запишіть первісні для функцій:

1) x^7; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{x^3}$; 4) $\sqrt[5]{x}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) e^x;

7) π^x; 8) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 9) $\frac{1}{\sin^2 x}$; 10) $\cos x$; 11) $\sin x$; 12) $x\sqrt{x}$

Відповідь: 1) $\frac{x^8}{8}$ +C; 2) $ln|x|$ +C; 3) $-\frac{1}{2x^2}$ +C; 4) $\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$ +C; 5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ +C; 6) e^x + C; 7) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}$ +C; 8) tgx+C; 9) $-ctgx$ + C; 10) $sinx$ + C; 11) - $cosx$ + C; 12) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ + C.

Правила знаходження первісних можна одержати за допомогою правил диференціювання.

Правило 1. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні відповідно функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то функція $F(x) \pm G(x)$ є первісною функції $f(x) \pm g(x)$.

Дійсно, оскільки $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, то $(F(x)\pm G(x))'=F'(x)\pm G(x)=f(x)\pm g(x)$.

Приклад 1. Знайдіть первісні для функції $f(x) = x + \cos x$.

Розв'язання

Оскільки для x одна із первісних є $\frac{x^2}{2}$, а для $\cos x$ однією із первісних є $\sin x$, то однією із первісних функції $x + cos\ x$ є функція $\frac{x^2}{2} + \sin x$, отже, $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Відповідь: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Правило 2. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а C — стала, то $CF(x)$ — первісна для функції $Cf(x)$.

Дійсно, оскільки $F(x) = f(x)$ то $(CF(x))' = CF'(x) = Cf(x)$.

Приклад 3. Знайдіть первісні для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Розв'язання

Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то однією із первісних для функції $5e^x$ є $5e^x$; оскільки однією із первісних для функція $sinx$ є $-cos\ x$, то однією із первісних для функції $7\sin x$ є $-7\cos x$; первісною функції $3x^2$ є $3\cdot\frac{x^3}{3} = x^3$. Отже, $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$ — первісні для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Відповідь: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Правило 3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — постійні числа, причому $k \neq 0$**,** то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$.

Дійсно, за правилом похідної складеної функції маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)^I = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b).$$

Приклад 5. Знайдіть первісні для функцій: а) $f(x) = (7 - 3x)^5$; б) $f(x) = e^{2x-1}$.

Розв'язання

а) Оскільки первісною для функції x^5 є функція $\frac{x^6}{6}$, то згідно з правилом 3 шукані первісні: $F(x)=-\frac{1}{3}\frac{(7-3x)^6}{6}+C=-\frac{(7-3x)^6}{18}+C$.

б) Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то згідно з правилом 3 маємо: $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

Відповідь: а) $F(x)=-\frac{(7-3x)^6}{18}+C$**;** б) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^2$; б) $f(x)= \frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}$ в) $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$; г) $f(x) = 5\cdot\sqrt[4]{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x)=5\cos x-3\sin x$; б) $f(x)=2e^x + 3\cos x$; в) $f(x)=\frac{4}{x}+10^x$; г) $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sin^2 x}$.

2. **Означення.** Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{1.1}$$

де $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз, C - довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають ***інтегруванням*** цієї функції.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx=a\cdot\int f(x)dx,\quad a\neq 0 \text{ – стала.}$$

2. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій:

$$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

3. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то й $\int f(u)du=F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, тоді

1) $\int f(kx)dx=\frac{1}{k}F(kx)+C$,

2) $\int f(x+b)dx=F(x+b)+C$,

3) $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$,

де k та b - сталі величини.

3. Таблиця основних інтегралів

$\int 0\cdot dx=C$
$\int dx=x+C$

$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$
$\int e^x = e^x + C$
$\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Лекція 11

Тема: Метод заміни змінної та інтегрування частинами
Мета: вивчення методів обчислення невизначеного інтеграла. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності.
Методи: словесний, практичний

План:

1 Метод заміною змінної (метод підстановки).
2 Метод інтегрування частинами.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН: таблиця невизначених інтегралів

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов.- М.: Наука, 1990.-С.255-266.
.

Теоретичні відомості:

Тема: Метод заміни змінної та інтегрування частинами

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

***Теорема*. Якщо $f(x)$ — неперервна, а $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну, то:**

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ t=\varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x)=t| = \int f(t)dt. \qquad (2)$$

Зауваження. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціалу), тому, наприклад:

$$\left(\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right) \Rightarrow \left(\int (u(x))^{\alpha}du(x) = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int (\mathrm{tg}x)^{\alpha}d(\mathrm{tg}x) = \frac{(\mathrm{tg}x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.\right.$$

У такому розумінні слід розглядати і всю таблицю інтегралів.

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} x=t^6, \\ dx=6t^5dt; \\ t=\sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6(t-\mathrm{arctg}\,t)+C = 6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Варіант заміни змінної інтегрування $\varphi(x)=t$ (2) зручний тоді, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$.

Приклад.

$$\int \sin^5 x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом.

Метод безпосереднього інтегрування

При безпосередньому інтегруванні використовується формула (2) варіанта заміни змінної, але саму заміну не записують (її роблять усно) при цьому використовують операцію внесення функції під знак диференціала. Отже, якщо $\int f(u)du = F(u)+C,$ то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x))+C.$$

Зокрема, коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x)=ax+b,$ дістаємо: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x) = d(\varphi(x)+C).$$

Приклад. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} =$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C.$$

Метод інтегрування частинами

Теорема **. Якщо функції *u*(*x*) та *v*(*x*) мають неперервні похідні, то:**

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v du. \qquad (3)$$

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким **правилом**:

— при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u\cdot dv$, тобто $f(x)dx=u\cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x\sin x dx=\left|\begin{array}{l}u=x, du=dx\\ dv=\sin x dx\Rightarrow\\ \Rightarrow\int dv=\int\sin x dx\Rightarrow\\ \Rightarrow v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int-\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий приклад.

$$\int x^2e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2, du=2xdx;\\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=x, du=dx;\\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=e^{3x}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)+C.$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій $u(x)$ та $v(x)$:

$$\int\underset{u}{P(x)}\cdot\underset{dv}{\sin(ax)dx};\ \int\underset{u}{P(x)}\cdot\underset{dv}{\cos(ax)dx};$$

$$\int\underset{u}{P(x)}\cdot\underset{dv}{e^{ax}dx};\ \int\underset{u}{\ln(ax)}\cdot\underset{dv}{Q(x)dx};\ \int\underset{u}{\operatorname{arctg}x}\cdot\underset{dv}{Q(x)dx};$$

$$\int\underset{u}{\arcsin(ax)}\cdot\underset{dv}{Q(x)dx}, \qquad (4)$$

де $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — алгебраїчна функція, $a\in R$.

Звичайно, не слід думати, що метод інтегрування частинами обмежується застосуванням тільки до інтегралів типу (4).

У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержується рівняння, із якого знаходять шуканий інтеграл.

Приклад.

$$G=\int e^x\cos x dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=u,\ du=-\sin x dx;\\ e^x dx=dv\Rightarrow v=e^x\end{array}\right|=$$

$$=e^x\cos x-\int-\sin x\cdot e^x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=u,\ du=\cos x dx;\\ e^x dx=dv\Rightarrow v=e^x\end{array}\right|=$$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x(\cos x+\sin x)-G.$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо $G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

Лекція 12

Тема: Визначений інтеграл та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.

Мета: Вивчення поняття визначеного інтегралу та його властивостей, заміна змінної та інтегрування частинами визначеного інтеграла. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Задачі, що приводять до визначеного інтеграла.
2 Означення визначеного інтеграла, геометричний зміст.
3 Властивості визначеного інтеграла.
4 Теорема Ньютона-Лейбніца.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Креслярське приладдя, плакати, калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с 267-279.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. - К.: АСК, 2001, с 365 - 385.

Теоретичні відомості

Тема: Визначений інтеграл та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Означення. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0,\ \ y = 0,\ \ x = a,\ \ x = b.$

На рис.1. зображені: класична криволінійна трапеція (*а*) та її вироджені випадки (*б*) та (*в*).

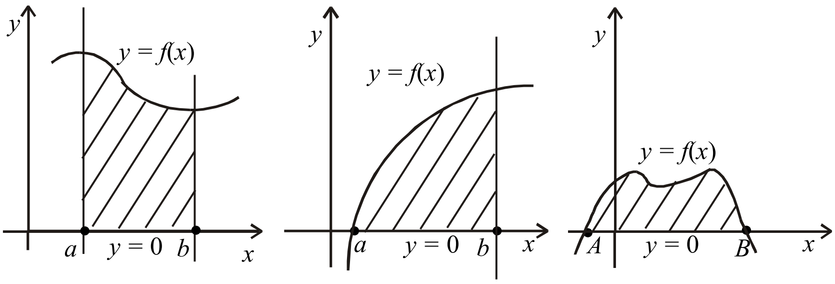


Рис. 1

Задача. Обчислити площу криволінійної трапеції *aABв* (рис. 2).

Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на *n* частин точками $x_i,\ i = \left(\overline{0,\ n}\right)$ так що $a = x_0,\ b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$ (рис. 2).

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max\Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\xi_i \cdot \Delta x_i$.

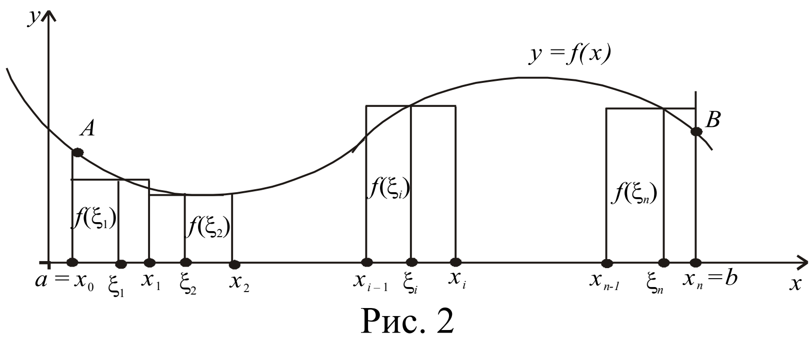


Рис. 2

Задача. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F} = \vec{e} \cdot f(x),\ |\vec{e}| = 1,$ що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x \in [a;\ b]$ (рис. 3).

Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на *n* частин точками $x_i,\ i = \left(\overline{0, n}\right)$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i),\ x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (рис. 7.5).

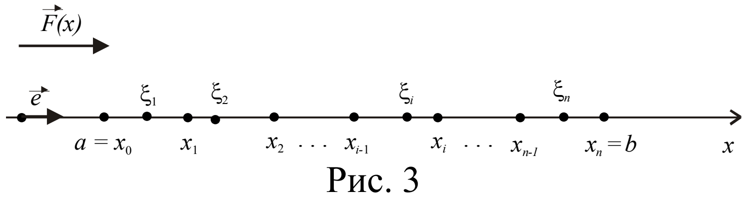


Рис. 3

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Робота A сили $\bar{F}$ на відрізку [*a*; *b*] знайдеться тоді так:

$$A = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i.$$

Означення. Сума типу $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$ називається *інтегральною сумою.*

Оперувати поняттям інтегральної суми доводиться у процесі розв'язку різних задач. Взагалі інтегральна сума може залежати від способу розбиття проміжка [*a*; *b*] на частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку [*a*; *b*]. Розіб'ємо [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <..< x_{i-1} < x_i <..< x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, $i = \left(\overline{1,n}\right)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max\Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda\to 0$ і не залежить ні від способу розбиття [*a*; *b*] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* [*a*; *b*] і позначається:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

f(*x*) — підінтегральна функція;

f(*x*) *dx* — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку [*a*; *b*]; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Означення. Функція, для якої на [*a*; *b*] існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Далі буде показано, що неперервні функції — інтегровні.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x)\ge 0,\ x\in[a;\, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 2).

Властивості визначеного інтеграла

І. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a).$

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0.$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

VII. Якщо $f(x) \geq 0$ і інтегровна для $x \in [a, b],\ b > a,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b],\ b > a,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b],\ b > a,$ то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Доведення випливає як наслідок із властивостей I та VIII.

X. ***Теорема 7* (*про середнє*).**

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b],\ b > a,$ то знайдеться така точка $x = c \in [a, b],$ що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a) \qquad (2)$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c), c \in [a, b]$ та $b - a$, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x) \geq 0$ та неперервна на проміжку $[a; b]$ (рис. 4).

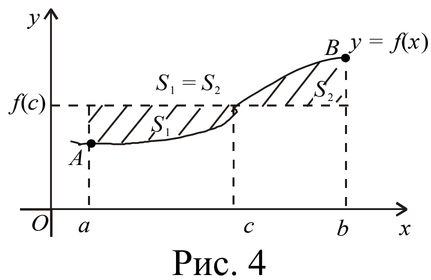


Рис. 4

***Теорема* Ньютона—Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a; b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x). \qquad (3)$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x)+C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b \qquad (4)$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

Приклад. $\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)^5\Big|_0^{\ln 2} =$

$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - \left(e^0 - 1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5 - (1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$

Лекція 13

Тема: Основні поняття та означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

Мета: Вивчення поняття диференціального рівняння, розв'язання задачі Коші, диференціального рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, наочний, практичний

План:

1 Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.
2 Основні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння.
3 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Креслярське приладдя, плакати, калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с 311-327.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.:К.-АСК,2001,с 421-430.

Теоретичні відомості

Тема: Основні поняття та означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлювальними змінними.

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними (термін «диференціальне рівняння» введений у 1576 р. Лейбніцем).

Диференціальне рівняння називається *звичайним,* якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням у частинних похідних,* якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

1. Диференціальні рівняння першого порядку

Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний вміст диференціального рівняння.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x,y,y') = 0, \qquad (1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y\,(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1), нерозв'язне відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно $y^{1}{}'$, то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі.

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ або } -f(x,y)dx + dy = 0$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q\ (x,\ y) \neq 0$, дістанемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (3)$$

де $P\ (x,\ y)$ і $Q\ (x,\ y)$ — відомі функції. Рівняння (3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду .(1), (2) і (3):

$xy'+y^2 — 1 = 0$; $-y'=2x — y$; $(x — 3y)dx + xydy = 0$.

Знаходження невідомої функції, що входить в деференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме непорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».).

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дає така теорема Коші [26].

Теорема 1 (про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція f (x, y) і її частинна похідна f'_y *(x, y) визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка* $(x_0; y_0) \in G$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння (2), який задовольняє умову*

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \textit{ тобто } \varphi(x_0) = y_0. \qquad (4)$$

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

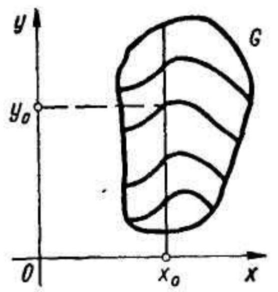


Рис. 8.1

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0; y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 *і* змінювати y_0, не виходячи при цьому з області *G,* то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (2) має безліч різних розв'язків (рис. 8.1).

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y=\varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) — y_0. \qquad (5)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається *задачею Коші. З* погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, *f(x, y)* або f'_y *(x, y) в* цих точках розривні), називаються *особливими.* Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком.*

Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою.* Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної.

Нехай задано рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (6)$$

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Нехай права частина диференціального рівняння (*2*) задовольняє в області *G* умови теореми Коші.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу *x* і довільної сталої *C,* називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області *G,* якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої *C* з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0; y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C=C_o$, що функція $y = \varphi(x, C_o)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_{,,}) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y=\varphi(x, C_o)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_o$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_o) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом рівняння.*

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y). \qquad (7)$$

де $y(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)\, f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\, dx-(y + yx^2)\, dy = 0.$$

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1+ y^2)dx-y(1+x^2)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \text{ або } \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$\ln(1+x^2) = \ln(1 + y^2) + \ln|C|$, $\quad C \neq O$. Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \quad C \neq 0$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2y)\,dy = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x + 1)dx + x^2(1 - y)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2y^2 \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{y+1}{y^2}dy = C, \quad C \in R,$$

або

$$\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

звідки

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax + by + c), \qquad (10)$$

де *a, Ь, c* — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \qquad (11)$$

рівняння (10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, диференціюючи рівність (11) по *x*, дістанемо $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, тому згідно з (10) маємо рівняння $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a+bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a+bf(u)} = dx$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи *u* на $ax + by + c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (10).

Якщо $a + bf(x) = 0$, або, що те ж саме, $\frac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (11), рівняння (10) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Лекція 14

Тема: Числові ряди. Основні поняття та означення. Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.

Мета: Вивчення основних понять та означень про числові ряди, ознак збіжності числових рядів. Розвиток логічного мислення, уваги, пам'яті. Виховання старанності, відповідальності.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Числові ряди. Основні поняття та означення.
2 Операції над рядами.
3 Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Калькулятори

Література:

Валуце И.И. Математика для техникумов, 1990, с. 396-419.
Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.:К.-АСК,2001,с 493-507.

Теоретичні відомості

Тема: Числові ряди. Основні поняття та означення. Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.

1. Числові ряди

1.1. *Теоретичні відомості та зразки розв'язання задач*

Числовим рядом називається вираз

$$\boxed{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n} \qquad (1)$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – члени числового ряду, u_n – загальний член ряду.

Сума n перших членів ряду $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=S_n$ називається ***n-ю частинною сумою ряду***.

Якщо існує скінченна границя

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S,} \qquad (2)$$

то числовий ряд (1) називається ***збіжним***, а число S називається ***сумою ряду*** (1). Якщо границя (2) не існує, то ряд (1) називається ***розбіжним***. Такий ряд суми не має.

Різницю між сумою ряду S та його n-ю частинною сумою S_n називають ***n-м залишком*** збіжного ряду (1). Залишок ряду позначається через r_n:

$$r_n = S - S_n = u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots \qquad (3)$$

Суму S збіжного ряду (1) можна представити у вигляді:

$$S = S_n + r_n = \left(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n\right)+\left(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots\right).$$

<u>Приклад 1</u>. Скориставшись означенням суми числового ряду, обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо частинні суми ряду:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3},$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5},$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7},$$

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = S_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}, \ \ldots$$

Запишемо послідовність частинних сум: $S_1 = \frac{1}{3}, \ \ S_2 = \frac{2}{5}, \ \ S_3 = \frac{3}{7}, \ \ S_4 = \frac{4}{9}, \ \ldots$

Загальний член цієї послідовності $S_n = \frac{n}{2n+1}$. За означенням, сума ряду

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, послідовність частинних сум має границю, яка дорівнює $\frac{1}{2}$. Таким чином, заданий ряд збігається і його сума $S = \frac{1}{2}$.

<u>Властивості числових рядів</u>:

1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і його сума дорівнює S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також збіжний і його сума дорівнює $\tilde{N}S$ $(\tilde{N} = const)$. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається і $C \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також розбігається.

2) Якщо числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і S_u та S_v – їхні суми відповідно, то збіжні також ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і їхні суми дорівнюють $S_u \pm S_v$ відповідно.

<u>Необхідна умова збіжності ряду</u>.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

<u>Достатня умова розбіжності ряду</u>.

Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

<u>Приклад 2</u>. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$6 + \frac{9}{10} + \frac{14}{25} + \ldots + \frac{n^2+5}{3n^2-2} + \ldots$$

Розв'язання. Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Необхідна умова збіжності не виконується, заданий ряд розбіжний.

Зауваження. Якщо необхідна умова виконується, то висновок про збіжність або розбіжність ряду *тільки на основі цього факту* зробити ***<u>не можна</u>***.

<u>Приклад 3</u>. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності числового ряду

$$\frac{6}{11} + \frac{7}{41} + \frac{8}{91} + \ldots + \frac{n+5}{10n^2+1} + \ldots$$

Розв'язання. Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{10n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{10+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{10} = 0 \cdot$$

Тут виконується необхідна умова збіжності числового ряду, проте вона не є достатньою для того, щоб зробити висновок про збіжність або розбіжність досліджуваного ряду.

Існують ***достатні ознаки*** збіжності, які дають можливість з'ясувати питання про поведінку ряду.

<u>Ознака Даламбера</u>.

Якщо для ряду з додатними членами $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то: 1) при $\rho < 1$ ряд *збіжний,*

2) при $\rho > 1$ ряд *розбіжний.*

При $\rho = 1$ слід застосовувати іншу ознаку.

Зауваження. Ознаку Даламбера доцільно застосовувати до рядів, загальні члени яких містять показникові множники або факторіали.

<u>Приклад 4</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{5} + \frac{9}{25} + \frac{16}{125} + ... + \frac{(n+1)^2}{5^n} + ...$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера.

За умовою маємо $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{5^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+2)^2}{5^{n+1}}$.

Обчислимо $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n+2)^2}{5^{n+1}} : \dfrac{(n+1)^2}{5^n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2 \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot (n+1)^2} = \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1} \right)^2 =$

$= \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = \dfrac{1}{5} \cdot 1 = \dfrac{1}{5} < 1$. За ознакою Даламбера даний ряд *збіжний.*

<u>Приклад 5</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + ... + \frac{4^n}{n!} + ...$$

Розв'язання. Запишемо n–й та $(n+1)$–й члени заданого ряду

$$u_n = \frac{4^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зауваження. $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ (в математиці «!» – знак факторіалу).
$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{4^n}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot n!}{n!\cdot (n+1)\cdot 4^n} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{(n+1)} = 0 < 1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *збіжний*.

<u>Приклад 6</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{4}{\sqrt{7}} + \frac{8}{\sqrt{10}} + \ldots + \frac{2^n}{\sqrt{3n+1}} + \ldots$$

Розв'язання. Оскільки для заданого ряду

$$u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}, \text{ то}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n}{2^n}\cdot\sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} = 2\cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}} = 2 > 1.$$

Отже, $\rho = 2 > 1$ – за ознакою Даламбера даний ряд *розбіжний*.

<u>Ознака порівняння рядів</u> (гранична).

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакододатні ряди $(u_n > 0,\ v_n > 0)$.

Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$, $(k \neq 0,$ $k \neq \infty)$, то *поведінка рядів однакова*: якщо один з рядів збіжний (розбіжний), то і другий ряд також збіжний (розбіжний).

Зауваження. Для застосування цієї ознаки заданий ряд слушно порівнювати з рядом, збіжність (чи розбіжність) якого відома заздалегідь.

Зокрема, це такі ряди:

- ***геометричний ряд*** (*сума членів нескінченної геометричної прогресії*)

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \; - \begin{cases} \text{çá³æíèé ïðè } |q| < 1; \\ \text{ðîçá³æíèé ïðè } |q| \geq 1; \end{cases} \qquad (4)$$

- ***гармонічний ряд***

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \; - \textit{розбіжний}; \qquad (5)$$

- ***узагальнений гармонічний ряд***

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \; - \begin{cases} \textit{çá³æíèé ïðè } \alpha>1; \\ \textit{ðîçá³æíèé ïðè } 0<\alpha<1. \end{cases} \qquad (6)$$

<u>**Приклад 7**</u>. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{26}+\frac{4}{83}+\ldots+\frac{n+1}{3n^3+2}+\ldots$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку порівняння рядів. Запишемо загальний член заданого ряду $u_n=\dfrac{n+1}{3n^3+2}$. Для порівняння оберемо ряд із загальним членом $v_n=\dfrac{1}{n^2}$ (який отримали, залишивши в чисельнику і знаменнику виразу для u_n тільки старші степені змінної n: $v_n=\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ – *збіжний* узагальнений гармонічний ряд, оскільки $\alpha=2>1$. Маємо

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n^3+2}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{3n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{3n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n^3}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки границя $k=\dfrac{1}{3}$ скінченна і $k\neq 0$, то ряди ведуть себе однаково, тобто заданий ряд *збіжний,* як і ряд, обраний для порівняння.

<u>**Приклад 8**</u>. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$.

Розв'язання. Запишемо загальний член заданого ряду $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$. Для порівняння оберемо ряд із загальним членом $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(v_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ – *розбіжний* узагальнений гармонічний ряд, оскільки $\alpha=\frac{1}{2}<1.$ Обчислимо $k=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}{3n+1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки границя $k=\frac{1}{3}$ скінченна і $k\neq 0$, то ряди ведуть себе однаково, тобто заданий ряд *розбіжний*, як і ряд, обраний для порівняння.

Лекція 15

Тема: Випадкові події. Імовірність випадкової події. Операції над подіями

Мета: вивчення понять випадкової величини, імовірність випадкової величини, перестановки, розміщення, комбінації; операцій дій над подіями. Розвиток логічного мислення, уваги, пам′яті, уявлення.

Методи: Словесний, практичний

План:

1 Випадкові події.
2 Види випадкових подій.
3 Імовірність випадкової події.
4 Операції над події: імовірність суми, імовірність добутку.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН:
Обчислювальна техніка

Література:

Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. -М.: Наука, 1990.-С. 370-379.

Теоретичні відомості:

Тема: Випадкові події. Імовірність випадкової події. Операції над подіями

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVII століття. Тоді були дуже поширені азартні ігри, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку. До таких ігор належать ігри з кубиками, гра в «орлянку», деякі карточні ігри. Б. Паскаль і П. Ферма в листуванні з приводу задач, які виникли в зв'язку з азартними іграми, запровадили поняття ймовірності. Для розв'язання таких задач існуючий тоді математичний апарат виявився недостатнім, і було закладено основи нової науки. Нині теорія ймовірностей широко застосовується в фізиці і в біології, у техніці, в різних галузях народного господарства.

Первісним поняттям теорії ймовірності є поняття події.

Подія — це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: A, *B, C...* Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (експерименту, досліду).

Випробування — це умови, в результаті яких відбувається (чи не відбувається) подія.

Наприклад, випробування — підкидання монети, події: A — «поява герба», *B* — «поява цифри»; випробування — підкидання кубика, події: A — «поява 1 очка», *B* — «поява 2 очок», *C* — «поява 3 очок», *D* — «поява 4 очок», *E* — «поява 5 очок»,*G* — «поява 6 очок».

Виконання вправ

1. Відокремте події і випробування та запишіть результат у таблицю:

а) тягнемо екзаменаційний білет, випадає білет № 3;

б) дістаємо лампу з коробки, вона бракована;

в) набираємо навмання телефонний номер· і чуємо голос знайомого;

г) відкриваємо поштову скриньку і знаходимо лист;

д) стріляємо і влучаємо в ціль.

	Випробування	Подія
а		
б		
в		
г		
д		

2. Наведіть свої приклади випробувань і подій.

Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Наприклад: під час витягування навмання однієї карти з колоди ви взяли короля. Подія A — «взято короля» є випадковою.

Випадкові події можуть бути масовими та одиничними.

Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені (можна спостерігати) необмежену кількість разів.

Наприклад, влучення або промах в серії пострілів; поява бракованих деталей при серійному випуску; радіоактивний розпад атомів речовин і т. д.

Прикладом одиничної випадкової події є падіння Тунгуського метеорита.

Теорія ймовірностей вивчає лише масові випадкові величини.

Вірогідною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика натурального числа, меншого за 7» — є вірогідною.

Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика цифри 7».

Виконання вправ

1. Наведіть приклади вірогідних подій.
2. Наведіть приклади неможливих подій.
3. Які із подій є вірогідними:

А — «два попадання при трьох пострілах»;

Б — «навмання вибране трицифрове число не більше 1000»;

С — «випадання 12 очок при киданні двох гральних кубиків»;

Е — «випадання цифри 3 при киданні монети»?

4. Які із подій є неможливими:

А — «випадання 13 очок при киданні двох гральних кубиків»;

В — «поява слова «мама» при випадковому наборі букв а, а, м, м».

С — «чотири попадання при трьох пострілах»;

D — «поява на одній грані грального кубка числа 8»?

5. Виконайте завдання 1 із підручника (стор. 491).
6. Вкажіть вірогідні, випадкові і неможливі події, які можуть відбутися при випробуваннях, записаних у таблиці.

№	***Випробування***	Випадкова подія	Вірогідна подія	Неможлива подія
1.	Підкидання грального кубика			
2.	Підкидання монети			
3.	Витягування кулі зі скриньки, де є чорні та білі кулі			
4.	Витягування двох гральних карт			
5.	Два постріли по мішені			

Повна група подій, попарно несумісні події, рівноможливі події, елементарні події.

Повною групою подій називається множина подій таких, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із них.

Наприклад: у випробуванні — кидання грального кубика повну групу подій становлять події:

A_1 — «поява числа 1»;

A_2 — «поява числа 2»;

A_3 — «поява числа 3»;

A_4 — «поява числа 4»;

A_5 — «поява числа 5»;

A_6 — «поява числа 6»,

або події:

B_1 — «поява парного числа»;

B_2 — «поява непарного числа».

Виконання вправ

Чи утворюють повну групу такі групи подій:

а) Випробування — кидання монети; події:

A_1 — «поява герба»;

A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання двох монет; події:

A_1 — «поява двох гербів»;

A_2 — «поява двох цифр».

в) Випробування — два постріли по мішені; події:

A_1 — «жодного попадання»;

A_2 — «одне попадання»;

A_3 — «два попадання».

г) Випробування — два постріли по мішені; події:

A_1 — «хоча б одне попадання»;

A_2 — «хоча б один промах».

д) Випробування — витягування карти із колоди карт; події:

B_1 — «поява карти червоної масті»;

B_2 — «поява карти бубнової масті»;

B_3 — «поява карти трефової масті»;

B_4 — «поява карти пікової масті»;

B_5 — «поява короля»;

B_6 — «поява дами».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) так; д) так.

Попарно несумісні події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Наприклад, попадання і промах при одному пострілі — це дві несумісні події; поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одному киданні грального кубика — це шість несумісних подій.

Виконання вправ

Чи є несумісними такі події:

а) Випробування — кидання монети; події:

A_1 — «поява герба»;

A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання двох монет; події:

B_1 — «поява герба на першій монеті»;

B_2 — «поява цифри на другій монеті».

в) Випробування — два постріли по мішені; події:

C_1 — «жодного попадання»;

C_2 — «одне попадання»;

C_3 — «два попадання».

г) Випробування — два постріли по мішені; події:

D_1 — «хоча б одне попадання»;

D_2 — «хоча б один промах».

д) Випробування — витягування двох карт з колоди; події:

E_1 — «поява двох чорних карт»;

E_2 — «поява туза»;

E_3 — «поява дами».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) ні; д) ні.

Рівноможливі події — це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Наприклад, поява цифр 1, 2, 3,4, 5, 6 при киданні грального кубика — рівноможливі події.

Виконання вправ

Чи є рівноможливими такі події:

а) Випробування — кидання монети; події:

A_1 — «поява герба»;

A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання неправильної (зігнутої) монети; події:

B_1 — «поява герба»;

B_2 — «поява цифри».

в) Випробування — постріл по мішені; події:

C_1 — «попадання»;

C_2 — «промах».

г) Випробування — кидання двох монет; події:

D_1 — «поява двох гербів»;

D_2 — «поява двох цифр»;

D_3 — «поява одного герба і однієї цифри».

д) Випробування — витягування однієї карти із колоди; події:

E_1 — «поява карти червоної масті»;

E_2 — «поява карти бубнової масті»;

E_3 — «поява карти трефової масті»;

E_4 — «поява карти пікової масті».

є) Випробування — кидання грального кубика; події:

F_1 — «поява не менше трьох очок»;

F_2 — «поява не більше чотирьох очок».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) ні; д) так; є) так.

Якщо події:

1) утворюють повну групу подій;

2) є несумісними;

3) є рівноможливими, то такі події утворюють *простір елементарних подій.*

Виконання вправ

1. Чи утворюють простір елементарних подій такі події:

а) Випробування — кидання монети; події:

A_1 — «поява герба»;

A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання двох монет; події:

B_1 — «поява двох гербів»;

B_2 — «поява двох цифр».

в) Випробування — кидання грального кубика; події:

C_1 — «поява не більше двох очок»;

C_2 — «поява трьох і чотирьох очок»;

C_3 — «поява не менше п'яти очок».

г) Випробування — постріл по мішені; події:

D_1 — «попадання»;

D_2 — «промах».

д) Випробування — два постріли по мішені; події:

E_1 — «жодного попадання»;

E_2 — «одне попадання»;

E_3 — «два попадання».

є) Випробування — витягування двох карт із колоди; події:

F_1 — «поява двох червоних карт»;

F_2 — «поява двох чорних карт».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) так; д) ні; є) ні.

У теорії імовірностей розрізняють **прості** й **складені** події. Наприклад, під час кидання двох костей у сумі випало 2 очки. Це **проста** подія.

*Подія називається **складеною,** якщо поява її залежить від появи інших, простих подій.*

Наприклад, під час кидання двох гральних кубиків у сумі випало 10 очок. Ця подія є складеною, бо вона може складатися з трьох простих подій:

4 на першому кубику випало 4, а на другому — 6 очок;

5 на першому і на другому кубиках випало по 5 очок;

6 на першому кубику випало 6, а на другому — 4 очки.

Обчислювати імовірності складених подій за формулою P(A) = ~ буває складно, а інколи й неможливо. їх імовірності обчислюють через імовірності простих подій, з яких утворюються складені. Таке обчислення спирається на застосування так званих теорем додавання і множення несумісних однаково можливих подій, які утворюють повну групу.

Введемо спочатку поняття про суму подій. Це поняття аналогічне поняттю суми чисел.

Сумою подій А і *В* ***називається подія*** *С,* ***яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події А, або події*** *В,* ***або обох разом.***

Суму двох подій позначають C = A + B.

Приклад. Подія А — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ -подія, яка означає влучення в ціль взагалі (не має значення з якого — першого, другого або обох пострілів).

*Сумою **С** двох несумісних подій **А і В є** подія, яка полягає у здійсненні або події А, або події **В.** Одночасна поява подій А і В виключена.*

Теорема (теорема додавання).

Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Задача. В урні лежать 4 чорних, 7 червоних, 9 зелених і 11 синіх кульок. З урни вийняли одну кульку. Визначити імовірність того, що вийнята кулька буде кольоровою (не чорною).

Розв'язання. Нехай подія А — поява кольорової кульки, A_1 - поява чорної, A_2 - поява червоної, A_3 - поява зеленої, A_4 - поява синьої кульки. Тоді подію А можна виразити як суму несумісних подій A_2, A_3, A_4, тобто $A = A_2 + A_3 + A_4$. За теоремою додавання, дістанемо

$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$,

$$P(A)=\frac{7}{31}+\frac{9}{31}+\frac{11}{31}=\frac{27}{31}=0.87$$

Теорему додавання застосовують для розв'язування тих задач, в яких ідеться про появу або події A_1, або події A_2, ..., або події $\mathbf{A_п}$**.**

З теореми додавання випливають два наслідки. *Наслідок* 1. ***Сума імовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.***

$P(A_1 + A_2+ ... + \mathbf{A_п}) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(\mathbf{A_п}) = 1.$

Приклад. Поява 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок під час одного кидання грального кубика є сукупність шести несумісних подій, які утворюють повну групу. При цьому $P(A_1) = P(A_2) = ... = P(\mathbf{A_п}) = \frac{1}{6}$.

Тому

$$\mathbf{P(A_1) +} P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = =\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

Перш ніж формулювати другий наслідок з теореми додавання, введемо означення протилежних подій.

Дві події називаються *протилежними*, якщо одна і лише одна з них обов'язково здійсниться в даному випробуванні.

Наприклад, влучення і промах під час одного пострілу, безвідмовна робота всіх елементів технічної системи і вихід з ладу одного з них.

Якщо А — деяка подія, то протилежна їй позначається А .

Події А і А утворюють повну групу несумісних подій.

Наслідок 2. **Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто**

$$\mathbf{P(A) + P(A) = 1} .$$

У задачах на обчислення імовірностей інколи зручно обчислювати шукану імовірність події А через імовірність протилежної події за формулою

$P(A) = 1 - P(A)$.

*Задача***.** Імовірність того, що день буде сонячним 0,85. Знайти імовірність того, що день буде похмурим.

P(A) =1-P(A)=1- 0,85 = 0,15

Теорема множення імовірностей

Введемо спочатку поняття добутку подій.

***Добутком двох подій* A *і* B *називається подія C, що полягає у здійсненні під час одиничного випробування і події* A*, і події* B.**

C = AB

Добутком двох подій A і ***B*** *називається подія AB, яка полягає у сумісній появі цих подій.*

Для добутку n подій використовуються позначення $C = A_1A_2 \ldots A_n$